PROBMLEM SOM FÖREKOMMIT SOM PROBLEM 1

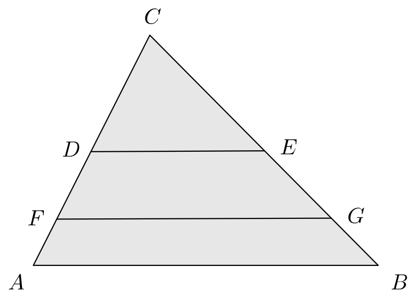
(1) Petra har totalt 1000 kr i sedlar av valörerna 20, 50, 100 och 500 kr och inga andra sedlar. Hon har minst en sedel av varje valör och fler 50-kronorssedlar än 20-kronorssedlar. Hur många sedlar har Petra? (2003)

(2) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y &= \sqrt{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 2\sqrt{2} \end{cases}$$

(2000)

(3) Linjerna DE och FG är båda parallella med linjen AB. De tre områdena CDE, $DFGE$ och $FABG$ har lika stora areor. Bestäm förhållandet $\frac{CD}{FA}$. (2006)



(4) Man vet att andelen ljushåriga bland dem som har blå ögon är större än andelen ljushåriga av hela befolkningen. Måste då andelen med blå ögon av de ljushåriga vara större än andelen med blå ögon av hela befolkningen? (1999)

PROBMLEM SOM FÖREKOMMIT SOM PROBLEM 2

(1) Två lika långa, cylindriska ljus är gjorda av var sitt material så att brinntiderna är olika. Det ena brinner upp på 4 timmar och det andra på 5 timmar. Ljusen tänds samtidigt. När skall ljusen tändas om man vill att det ena ljuset skall vara dubbelt så långt som det andra klockan 21.00? (2007)

(2) Summan av nio olika positiva heltal är 122. Det största talet är inte mer än dubbelt så stort som det minsta talet. Vilka är de nio talen? (1992)

(3) Givet är en spetsvinklig triangel. Två cirklar ritas med två av triangelns sidor som diametrar. Visa att en av cirklarnas skärningspunkter ligger på triangelns tredje sida. (2008)

(4) På dagen för en släktträff sommaren 2010 fyller Lennart, Lotten och Lisa år. Lennart har räknat ut att produkten av deras åldrar är 6958. En gång tidigare under 2000-talet har släktingarna sammanstrålat samma datum. Då var summan av Lennarts, Lottens och Lisas åldrar lika med 80, men vad var produkten den gången? (2010)

PROBMLEM SOM FÖREKOMMIT SOM PROBLEM 3

(1) Två koncentriska cirklar (det vill säga två cirklar med samma medelpunkt) har radier a och b, där $b > a$. Låt PQ vara en diameter i den större cirkeln. En linje genom Q tangerar den mindre cirkeln i punkten T. Bestäm längden av sträckan PT uttryckt i a och b. (2013)

(2) I en skål har Rurik 99 kulor: 33 röda, 33 blå och 33 vita. <på bordet finns dessutom extrakulor av alla färger. Han byter kulor i skålen mot kulor på bordet enligt följande regler:

(a) Tre blå kulor och en röd kula i skålen får bytas mot två vita kulor från bordet.

(b) Tre röda och en blå kula i skålen får bytas mot två vita från bordet.

(c) Fyra vita i skålen får bytas mot en röd och en blå från bordet.

Är det möjligt att byta kulor enligt dessa regler så att tre kulor, en av varje färg, återstår i skålen? (1991)

(3) Finn alla reella löningar till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y - z &= 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \\ xyz &= 60 \end{cases}$$

(2011)

(4) Differensen mellan två femsiffriga heltal är 246. Visa att de tio siffror som ingår i de båda talen inte alla kan vara olika. (2010)

PROBMLEM SOM FÖREKOMMIT SOM PROBLEM 4

(1) Sträckorna AP och BQ är höjder i triangeln ABC. Triangelns vinkel vid hörnet C är $100°$. Punkten M är mittpunkt på sidan AB. Bestäm vinkeln PMQ. (2014)

(2) På en tavla står sex positiva heltal i rad. För vart och ett av talen, utom det sista, gäller att summan av det talet och det dubbla värdet av det nästföljande talet alltid är 72. Bestäm de sex talen. (2012)

(3) I fyrhörningen $ABCD$ är $|AC| = 2|BC|$. Vidare gäller att $\angle ABD = \angle DBC = \angle DAC$. Man vet att $\angle ADC = 90°$. Bestäm fyrhörningens övriga vinklar. (2011)

(4) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$f(f(x)) = x$$

där f är polynomet

$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

(2005)

PROBMLEM SOM FÖREKOMMIT SOM PROBLEM 5

(1) Visa att
$$xy + 2x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + xy^3$$
för alla $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. (2008)

(2) Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar triangeln i punkterna A_1 på sidan BC, B_1 på sidan AC och C_1 på sidan AB. Den i triangeln $A_1B_1C_1$ inskrivna cirkeln tangerar triangeln $A_1B_1C_1$ i punkterna A_2 på sidan B_1C_1, B_2 på sidan A_1C_1 och C_2 på sidan A_1B_1. Bestäm vinklarna i triangeln $A_2B_2C_2$ då vinklarna vid A, B och C är givna. (2010)

(3) Låt a, b och c vara positiva heltal. Bestäm det minsta möjliga värdet av
$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$
om $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 218$. (2001)

(4) Låt a och b vara positiva heltal. Betrakta de ab punkter med heltalskoordinater (i, j) som uppfyller att $0 \leq i < a$, och $0 \leq j < b$. Var och en av dessa punkter färgas i en av k, $k \geq 2$, olika färger som är numrerade från 0 till $k-1$. I punkten med koordinater (i, j) ges färgens nummer av resten vid heltalsdivision av $i + j$ med k. Om varje färg förekommer i lika många punkter, visa att minst ett av talen a och b är jämnt delbart med k. (2013)

PROBMLEM SOM FÖREKOMMIT SOM PROBLEM 6

(1) Låt $P_1, P_2, ..., P_n$ vara n olika punkter i planet. Man markerar med blå färg mittpunkterna på alla möjliga sträckor mellan skilda punkter, dvs P_iP_j, där $1 \leq i < j \leq n$. Vilket är det minsta möjliga antalet olika blå punkter? (2008)

(2) Låt a och b vara två positiva heltal sådana att
$$8a^2 + 2a = 3b^2 - b.$$
Visa att både $2a + b$ och $4a - 2b + 1$ är kvadrater av heltal. (2014)

(3) Låt M vara mittpunkten på sidan BC av parallellogrammen $ABCD$. Låt E vara den punkt på sträckan AM för vilken vinkeln DEM är rät. Visa att triangeln DEC är likbent.(2005)

(4) Anton har röda och blå pärlor. Med dem vill han försöka fylla en kvadrat med $n \times n$ piggar (på vilka pärlorna ska sättas) på ett sådant sätt att varje pärla har exakt två ”grannpärlor” med samma färg som pärlan själv. Två pärlor räknas som grannar om de ligger bredvid varandra, antingen i vertikal eller i horisontell ledd. För vilka n är detta möjligt? (2010)

Svar

Förstaproblem

1. 13 st.
2. $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
4. Ja.

Andraproblem

1. 17.40.
2. 9,10,11,12,14,15,16,17,18.
4. 2010.

Tredjeproblem

1. $|PT| = \sqrt{3a^2 + b^2}$.
2. Nej.
3. $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, $(4, 3, 5)$, $(-2 + \sqrt{14}, -2 - \sqrt{14}, -6)$,
   $(-2 - \sqrt{14}, -2 + \sqrt{14}, -6)$.

Fjärdeproblem

1. $20°$.
2. $56, 8, 32, 20, 26, 23$.
3. $\angle ABC = 90°$, $\angle BCD = 105°$, $\angle DAB = 75°$,
4. $x = 1$ och $x = 2$.

Femteproblem

2. $A_2 = 45° + A/4$, $B_2 = 45° + B/4$, $C_2 = 45° + C/4$.
3. 606

Sjätteproblem

1. $2n - 3$.
4. För jämna tal n.

Lösningar finns tillgängliga via: `http://www.mattetavling.se/problem/` och `http://www2.math.uu.se/~dag/probtext.html`