Prövning matematik 4
22 april 2016 (prövningstillfälle 6)

Namn	Klass	Personnummer (ej fyra sista)

Mobiltelefonnummer	e-post SKRIV TYDLIGT!

Alla papper ska förses med namn och återlämnas
Skriv tydligt. Oläsliga lösningar kan givetvis inte rättas och därmed inte ge några poäng.

Skrivtid: 180 minuter
Hjälpmedel: Formelblad, samt på del 2 digitala verktyg

Redovisning: I alla uppgifter – om det inte står *(endast svar krävs)* – krävs någon form av redovisning.
Redovisa dina beräkningar, motivera dina lösningar och rita figurer vid behov.

Kravgränser
Provet består av två delprov, del 1 utan digitala verktyg och del 2 med digitala verktyg
Tillsammans kan de ge 45 poäng varav 18 E-, 16 C-, 11-A-poäng
E: 12 poäng
D: 17 poäng varav 5 poäng på minst C-nivå
C: 23 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå
B: 30 poäng varav 3 poäng på A-nivå
A: 36 poäng varav 6 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar.
Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa.
Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står *(endast svar krävs)* behöver du endast ge ett kort svar.
Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar
och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

LÖSNINGSFÖRSLAG

Del 1 – Utan digitala verktyg

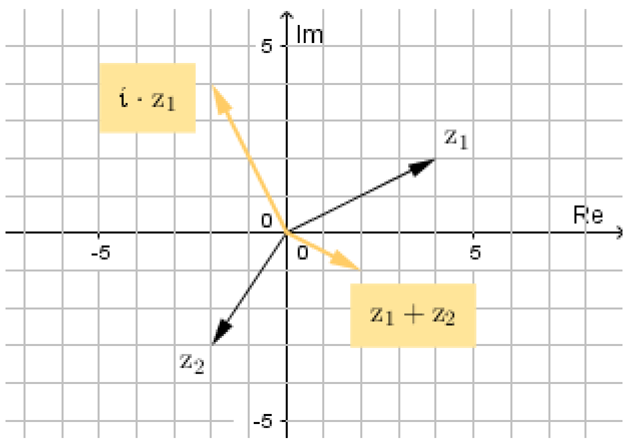
1. För funktionen f gäller att $f(x) = \cos 2x$
   Bestäm $f(30°)$ *(endast svar krävs)* (1/0/0)

   $f(30°) = \cos(2 \cdot 30°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

   Svar: $\frac{1}{2}$

   Kommentar: Formelblad Ma 4 > Trigonometri > Exakta värden
   avläs ur tabell, $\cos 60° = \frac{1}{2}$

2. I det komplexa talplanet nedan är två komplexa tal z_1 och z_2 markerade



   a. Bestäm $z_1 + z_2$ *(endast svar krävs)* (1/0/0)

   $z_1 = 4 + 2i$

   $z_2 = -2 - 3i$

   $z_1 + z_2 = 4 + 2i + (-2 - 3i) = 4 + 2i - 2 - 3i = 2 - i$

   b. Rita noga in talet $i \cdot z_1$ i koordinatsystemet *(endast svar krävs)* (1/0/0)

   $i \cdot z_1 = i(4 + 2i) = 4i + 2i^2 = -2 + 4i$

   multiplikation med i medför en rotation med $+ 90°$

3. Bestäm (1/0/0)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \quad \text{om} \quad \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -2 \quad \text{och} \quad \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \ 1 + (-2) = -1$$

Svar: -1

Kommentar: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$ där $a < c < b$

4. Derivera

a. $f(x) = (3x+1)^4$ (1/0/0)

$f'(x) = 4(3x+1)^{4-1} \cdot 3 = 12(3x+1)^3$

b. $f(x) = e^x \cdot 2x$ (1/0/0)

$f'(x) = e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2 = 2e^x(x+1)$

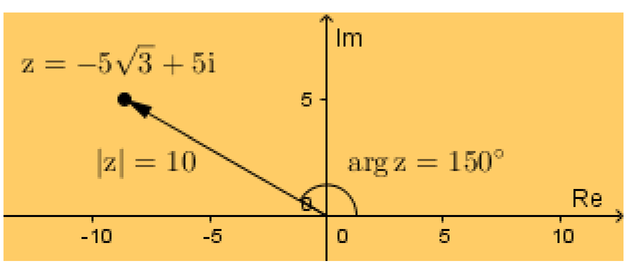
5. Skriv talet $z = -5\sqrt{3} + 5i$

a. i polär form (2/0/0)

$|z| = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{75+25} = 10$

$\arg z = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 150°$

Svar: $z = 10(\cos 150° + i \sin 150°)$ eller $z = 10\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$



Kommentar: Formelblad Ma 4 > Trigonometri > Exakta värden

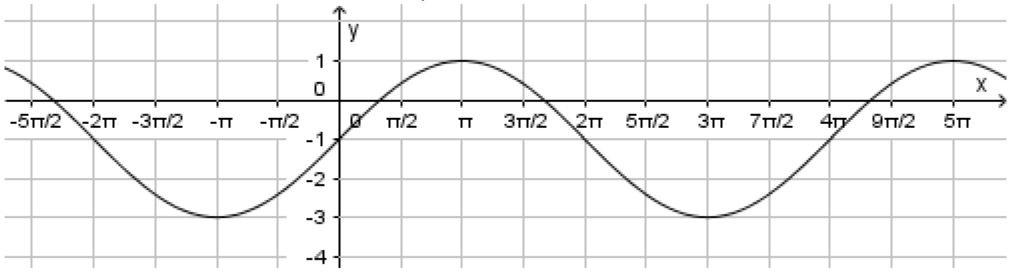
avläs ur tabell, $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 150°$

b. på formen re^{iv} (1/0/0)

Svar: $10e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Kommentar:
Vid användning av polär form kan vinkeln anges i grader eller radianer
Vid användning av potensform måste vinkeln anges i radianer

6. Bestäm ekvationen för sinuskurvan på formen $= A\sin(kx) + B$ (1/1/0)



Kurvan ska jämföras med $y = \sin x$

Kurvans amplitud är $\dfrac{y_{max} - y_{min}}{2} = \dfrac{1-(-3)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \;\Rightarrow\; A = 2$

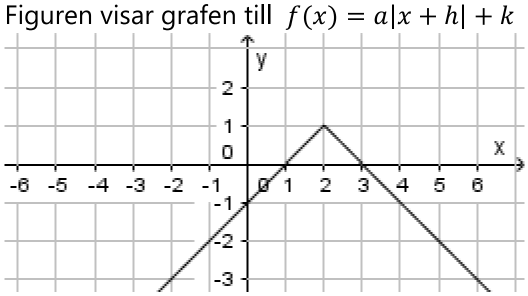
Kurvans period $P = \dfrac{2\pi}{k} \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{2\pi}{P} = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$

Kurvans vågräta symmetrilinje ligger en enhet under x axeln $\Rightarrow\; B = -1$

Svar: $y = 2\sin\dfrac{x}{2} - 1$

Kommentar: Om sinuskurvan ska uttryckas på formen $y = A\sin(kx) + B$ så innebär det att förskjutningen i x-led är noll

7. Figuren visar grafen till $f(x) = a|x+h| + k$

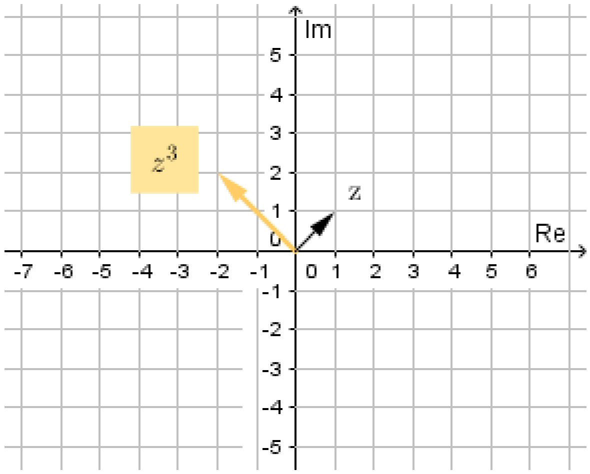


Bestäm konstanterna a, h och k (1/1/0)

Grafen jämförs med $y = |x|$

$a = -1$, a anger lutning till höger om brytpunkten, vertex.
$h = -2$, h anger horisontell förskjutning av vertex och alla andra punkter från origo
$k = 1$, k anger vertikal förskjutning från av vertex och alla andra punkter från origo

8. Det komplexa talet z är markerat som en visare i det komplexa talplanet nedan.
Rita det komplexa talet z^3 i samma talplan. (0/2/0)



$z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\arg z = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°$
$z = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

$z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 (\cos(3 \cdot 45°) + i \sin(3 \cdot 45°)) = 2\sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°)$

9. Bestäm funktionen f om $f\,'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$ (0/1/0)

Högerledet
$2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)$
ger oss anledning att anta att f är en produkt av två funktioner
$f = g \cdot h \;\Rightarrow$
$f' = g' \cdot h + g \cdot h'$ som jämförs med
$2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)$
vilket ger
$g = x^2$ och $h = \cos x \;\Rightarrow$
$f = g \cdot h = x^2 \cdot \cos x$

Kontroll:
$f = x^2 \cdot \cos x \;\Rightarrow\; f' = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$

Svar: $f = x^2 \cdot \cos x$

10. Lös ekvationen

$\tan 2x = \sqrt{3}$

och svara i grader (1/1/0)

$\tan 2x = \sqrt{3}$

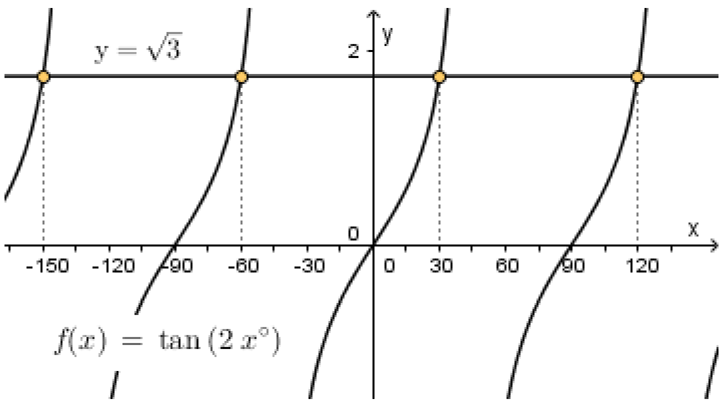
$2x = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$2x = 60° + n \cdot 180°$

$x = 30° + n \cdot 90°$

Svar: $x = 30° + n \cdot 90°$

Kommentar: Formelblad Ma 4 > Trigonometri > Exakta värden avläs ur tabell, $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$



11. Beräkna integralen (1/1/0)

$$\int_1^4 \frac{x^2+1}{x}\,dx$$

$$\int_1^4 \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^4 \left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^4 =$$

$$\left(\frac{4^2}{2} - \ln 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln 1\right) = 8 - \ln 2^2 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{15}{2} - 2\ln 2$$

Svar: $\frac{15}{2} - 2\ln 2$

Kommentar: Svaret $7.5 - \ln 4$ bedöms likvärt

12. Antag att

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ g(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

a. Bestäm $f(g(x))$ *(endast svar krävs)* (1/0/0)

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Svar: $f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

b. Ange definitionsmängden för $f\big(g(x)\big), x \in \mathbb{R}$ (0/1/1)

$\sqrt{a}$ kräver att $a \geq 0 \Rightarrow$

$x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 \geq 1$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$\dfrac{1}{a}$ kräver att $a \neq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$

$x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

Svar: $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x < -1 \ \text{ eller } \ x > 1\}$

13. Bestäm samtliga asymptoter till (0/1/1)

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

Lodräta asymptoter fås då nämnaren är noll, vilket ger ekvationen

$x^2 - 1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Då täljarens gradtal är exakt 1 högre än nämnaren finns en sned asymptot
Skriv om $f(x)$ med hjälp av Polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} & x + 1 \\ \hline x^2 - 1 & x^3 + x^2 - 1 \\ & -\underline{\ \ x^3 - x\ \ } \\ & \quad x^2 + x - 1 \\ & \quad -\underline{\ \ x^2 - 1\ \ } \\ & \qquad\quad x \end{array}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}\right) = x + 1$$

Svar: $x = -1$, $x = 1$ och $y = x + 1$

14. En lösning till ekvationen $z^3 - 4z^2 + 3z - 12 = 0$ är $z = 4$
Bestäm övriga lösningar till ekvationen (0/2/0)

Om $z = 4$ är en lösning så är $(z - 4)$ en faktor i $z^3 - 4z^2 + 3z - 12$
Faktorisera med hjälp av polynomdivision

$$\begin{array}{r|l} & z^2 + 3 \\ \hline z - 4 & z^3 - 4z^2 + 3z - 12 \\ & -\underline{\ (z^3 - 4z^2)\ } \\ & \qquad\qquad 3z - 12 \\ & \qquad\quad -\underline{\ 3z - 12\ } \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$z^3 - 4z^2 + 3z - 12 = (z - 4)(z^2 + 3)$

$z^2 + 3 = 0$

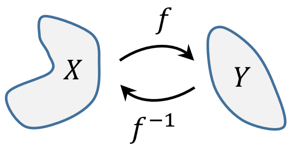
$z = \pm\sqrt{-3}$

$z = \pm i\sqrt{3}$

Svar: $z_2 = i\sqrt{3}$ och $z_3 = -i\sqrt{3}$

15. Bestäm den inversa funktionen $f^{-1}(x)$ till $f(x) = 10^{x-1}$ (0/0/1)

Om $y = f(x)$ så är $x = f^{-1}(y)$



Sätt $y = f(x)$ ger

$y = 10^{x-1}$

Den inversa funktionen fås genom att lösa ut x

$\lg y = \lg 10^{x-1}$

$\lg y = x - 1$

$x = \lg y + 1$

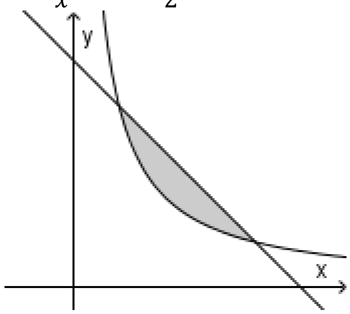
Variabelbyte ger

$y = \lg x + 1$

Svar: $f^{-1}(x) = \lg x + 1$

16. Figuren nedan visar graferna till funktionerna

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{5}{2} - x$



Bestäm arean av det markerade området. (0/1/2)

För att få integrationsgränserna sätt upp ekvationen

$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x$

multiplicera VL och HL med mgn

$\left(\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x\right) \cdot 2x$

$\frac{1 \cdot 2x}{x} = \frac{5 \cdot 2x}{2} - x \cdot 2x$

$2 = 5x - 2x^2$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}$

$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$

$x = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Sökt area

$A = \int_a^b (\text{övre funktion} - \text{undre funktion})\, dx$

$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\left(\frac{5}{2} - x\right) - \left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right) dx =$

$\left[\frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left(\frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{2^2}{2} - \ln 2\right) - \left(\frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$

$5 - 2 - \ln 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{8} + \ln 1 - \ln 2 =$

$3 - 2\ln 2 - \frac{9}{8} =$

$\frac{15}{8} - 2\ln 2$

Svar: $\frac{15}{8} - 2\ln 2$ a. e.

17. Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter för funktionen f där

$f(x) = \ln x \cdot 4x \,,\ x > 0$

(0/1/1)

Derivera

$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 4x + \ln x \cdot 4 = 4 + 4\ln x$

Ekvationen $f'(x) = 0$ ger x-koordinat för extrempunkt

$4 + 4\ln x = 0$

$4(1 + \ln x) = 0$

$1 + \ln x = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1}$

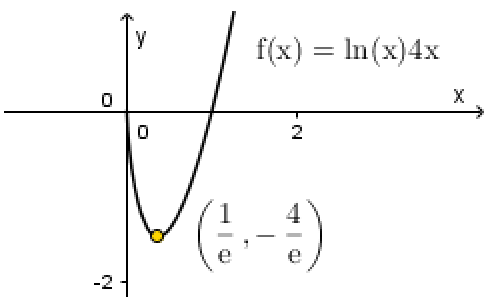
$x = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.7} = \frac{10}{27} \approx \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0.4$

$f''(x) = 0 + 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

$f''(0.4) > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ är x koordinat för en minimipunkt

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\frac{1}{e} \cdot 4 \cdot \frac{1}{e} = \ln e^{-1} \cdot \frac{4}{e} = -\frac{4}{e}$

Svar: Minimipunkt $\left(\frac{1}{e}, -\frac{4}{e}\right)$



18. Visa att (0/0/2)

$\cos(-75°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$VL = \cos(-75°) = \cos 75° = \cos(45° + 30°) =$

[additionsformel för cosinus]=

$\cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = HL$

Del 2 – Med digitala verktyg
(miniräknare, grafritande räknare, eller motsvarande utan möjlighet till kommunikation)

Namn	Klass	Personnummer (ej fyra sista)

Alla papper ska förses med namn och återlämnas

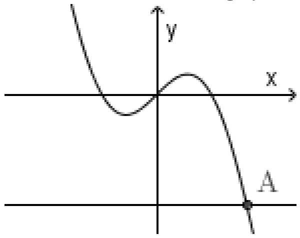
19. Bestäm $g'\left(\frac{\pi}{7}\right)$ om $g(x) = 5\sin 2x$ Svara med två decimaler (1/0/0)

$g(x) = 5\sin 2x$
$g'(x) = 10\cos 2x$
$g'\left(\frac{\pi}{7}\right) = 10\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{7}\right) \approx 6.23$

Svar: $g'\left(\frac{\pi}{7}\right) \approx 6.23$

Kommentar: Räknaren ska vara inställd på radianer då vinkeln $\frac{\pi}{7}$ är angiven i radianer
Om du inte kan ställa om räknaren till radianer omvandla då vinkeln till grader
$\frac{\pi}{7} = \frac{180°}{7}$
$g'\left(\frac{180°}{7}\right) = 10\cos\left(2 \cdot \frac{180°}{7}\right) \approx 6.23$

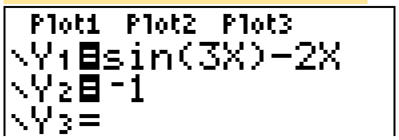
20. Figuren visar $f(x) = \sin 3x - 2x$ och $y = -1$
samt deras skärningspunkt A



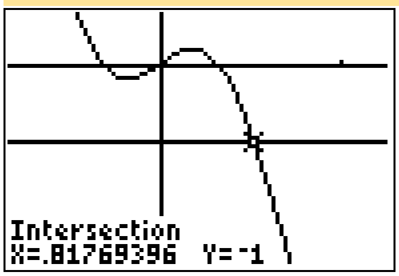
Bestäm lutningen på kurvan $f(x) = \sin 3x - 2$ i punkten A
Svara med 3 värdesiffror. (2/0/0)

Lösningsförslag 1: Grafisk lösning med grafritande räknare

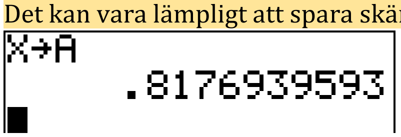
Mata in funktionerna i räknaren



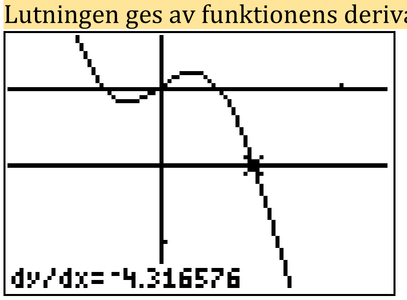
Använd funktionen intersect eller motsvarande för att hitta skärningspunktens x-koordinat



Det kan vara lämpligt att spara skärningspunktens x-koordinat i en variabel

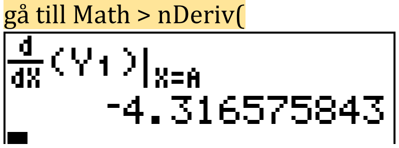


Lutningen ges av funktionens derivata då x = 0.817…



Lösningsförslag 2: Numerisk lösning med grafritande räknare

Med skärningspunktens x-koordinat är lagrad i variabeln A
och funktionen lagrad i variabeln Y_1
gå till Math > nDeriv(



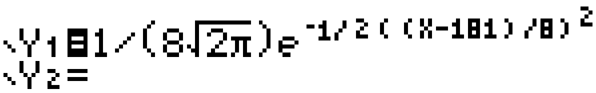
Svar: -4.32

21. Hur stor är sannolikheten att en slumpvis vald 18-årig man är mellan 180 och 190 cm om längden av alla 18-åriga män är normalfördelad med väntevärdet $\mu = 181$ cm och standardavvikelsen $\sigma = 8$ cm (1/1/0)

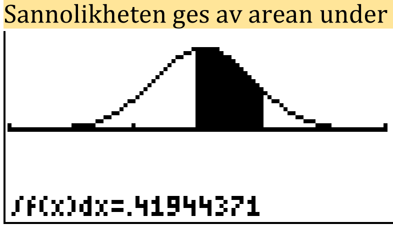
Formelblad Ma4 > Statistik och sannolikhet > Täthetsfunktion för normalförelning

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Gå till Y = knappen och mata in funktionen



Sannolikheten ges av arean under kurvan mellan 180 och 190

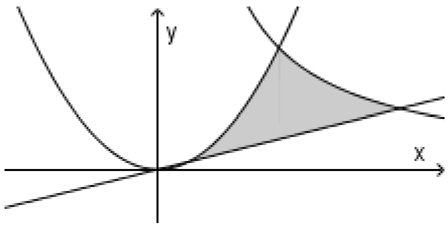


Svar: 0.42 = 42%

22. Figuren nedan visar graferna till de tre funktionerna

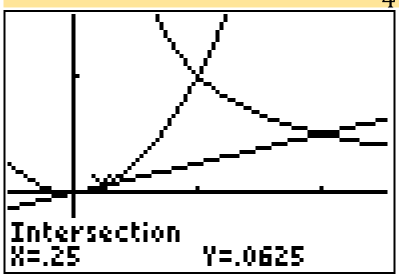
$y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = \frac{x}{4}$

Beräkna arean av det markerade området. (0/2/0)

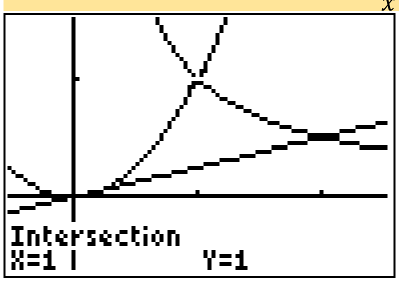


Beräkna först x-koordinaterna för de tre skärningspunkerna

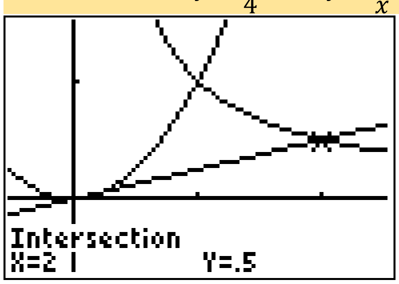
Intersect mellan $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ och $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{x}}{4}$ ger $\mathrm{x} = 0.25$



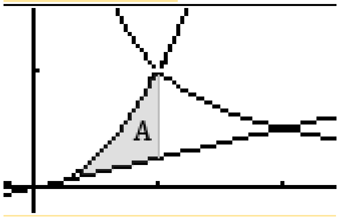
Intersect mellan $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ och $\mathrm{y} = \frac{1}{x}$ ger $\mathrm{x} = 1$



Intersect mellan $\mathrm{y} = \frac{x}{4}$ och $\mathrm{y} = \frac{1}{x}$ ger $\mathrm{x} = 2$



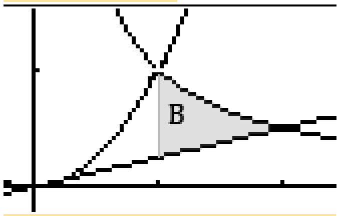
Beräkna area A



$$A = \int_{0.25}^{1} \left(x^2 - \frac{x}{4}\right) dx \approx 0.2109 \ldots$$

```
∫(.25 to 1) (X²-X/4)dX
                .2109375
Ans→A
                .2109375
```

Beräkna area B



$$B = \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx \approx 0.3181 \ldots$$

```
∫(1 to 2) (1/X-X/4)dX
             .3181471806
Ans→B
             .3181471806
```

Addera arean A och B

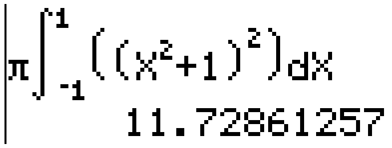
```
A+B
             .5290846806
```

Svar: 0.529 a. e.

23. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då det område som begränsas av kurvan $y = x^2 + 2$ samt linjerna $x = -1$ och $x = 1$ får rotera kring linjen $y = 1$ (0/0/3)

Lösningsalternativ 1:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2 - 1)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 \, dx \approx 11.7 \text{ v.e.}$$



Svar: 11.7 v. e.

Lösningsalternativ 2: Exakt lösning utan tekniskt hjälpmedel

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx =$$

$$\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} =$$

$$\pi \left(\left(\frac{1^5}{5} + \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + \frac{2 \cdot (-1)^3}{3} - 1 \right) \right) =$$

$$\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) =$$

$$\pi \left(2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \pi \left(\frac{30 + 20 + 6}{15} \right) = \frac{56\pi}{5}$$

Bild från WolframAlpha som visar roationskroppen