Prövning matematik 4
26 feb 2016 (prövningstillfälle 4)

Namn	Klass	Personnummer (ej fyra sista)

Mobiltelefonnummer	e-post SKRIV TYDLIGT!

Alla papper ska förses med namn och återlämnas
Skriv tydligt. Oläsliga lösningar kan givetvis inte rättas och därmed inte ge några poäng.

Skrivtid: 180 minuter
Hjälpmedel: Formelblad, samt på del 2 digitala verktyg

Redovisning: I alla uppgifter – om det inte står *(endast svar krävs)* – krävs någon form av redovisning.
Redovisa dina beräkningar, motivera dina lösningar och rita figurer vid behov.

Kravgränser
Provet består av två delprov, del 1 utan digitala verktyg och del 2 med digitala verktyg
Tillsammans kan de ge 45 poäng varav 18 E-, 16 C-, 11-A-poäng
E: 12 poäng
D: 17 poäng varav 5 poäng på minst C-nivå
C: 23 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå
B: 30 poäng varav 3 poäng på A-nivå
A: 36 poäng varav 6 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar.
Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa.
Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar.
Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar
och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

LÖSNINGSFÖRSLAG

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Derivera

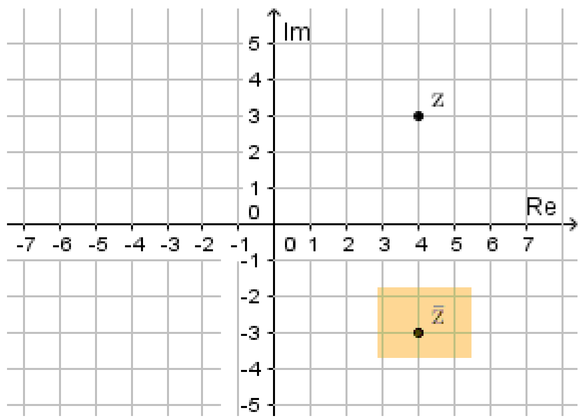
   a. $f(x) = \sin 3x$ *(endast svar krävs)* (1/0/0)

   Svar: $f'(x) = 3\cos 3x$

   b. $g(x) = (1 - 5x)^4$ *(endast svar krävs)* (1/0/0)

   Svar: $g'(x) = 4(1 - 5x)^{4-1}(-5) = -20(1 - 5x)^3$

2. Figuren visar ett komplext talplan där talet z är markerat.



   a. Markera talet $\bar{z}$ i talplanet ovan *(endast svar krävs)* (1/0/0)

   b. Bestäm $z \cdot \bar{z}$ (1/0/0)

   $z \cdot \bar{z} = (4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 16 - 9i^2 = 16 + 9 = 25$

   Svar: 25

3. För de komplexa talen z och w gäller

   $z = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

   a. Bestäm (1/0/0)

   $\left|\frac{z}{w}\right|$

   $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{5}{2} = 2.5$

   Svar: 2.5

   b. Bestäm (1/0/0)

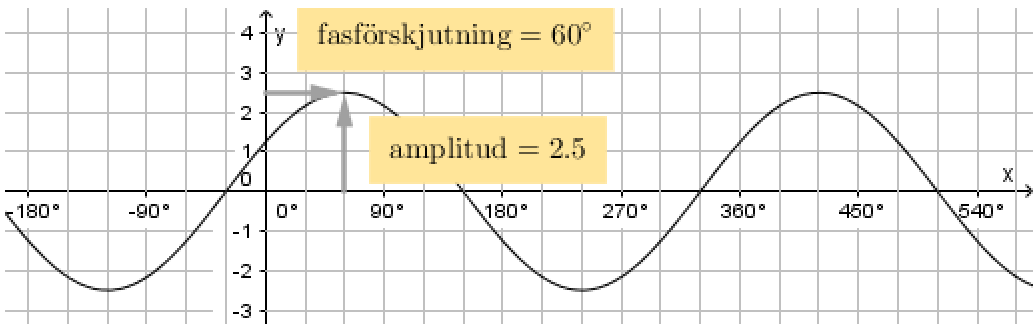
   $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$

   $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

   Svar: $\frac{\pi}{3}$

4. Ange kurvan i figuren som en cosinusfunktion.

(0/2/0)



Svar: $f(x) = 2.5\,cos(x - 60°)$

5. Bestäm konstanten b så att polynomet $p(x) = x^6 + 5x^4 - 10x + b$ blir delbart med faktorn $(x - 1)$

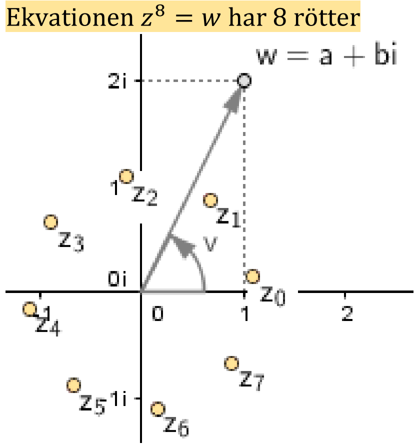
(0/1/0)

Faktorsatsen: Om $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$ för något polynom $q(x)$, så är $p(a) = 0$
Då $(x - 1)$ är en faktor i $p(x)$ ger faktorsatsen att $p(1) = 0$
$1^6 + 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1 + b = 0$
$1 + 5 - 10 + b = 0$
$b = -4$
Svar: $b = -4$

6. $z_0 = \cos 15° + i \sin 15°$ är en rot till ekvationen $z^8 = w$
Bestäm en annan rot till samma ekvation

(0/0/1)

Ekvationen $z^8 = w$ har 8 rötter



Rötterna i det komplexa talplanet bildar hörnen i en regelbunden n-hörning.
$360°/8 = 45°$ utgör vridningsvinkeln mellan två hörn i n-hörningen och då blir övriga lösningar:
$z_1 = \cos(15° + 1 \cdot 45°) + i \sin(15° + 1 \cdot 45°) = \cos 60° + i \sin 60°$
$z_2 = \cos(15° + 2 \cdot 45°) + i \sin(15° + 2 \cdot 45°) = \cos 105° + i \sin 105°$
$\vdots$
$z_7 = \cos(15° + 7 \cdot 45°) + i \sin(15° + 7 \cdot 45°) = \cos 330° + i \sin 330°$

Svar: Till exempel $z_1 = \cos 60° + i \sin 60°$

7. Beräkna

$$\frac{3-i}{1+i}$$

och svara på formen $a + bi$ (0/2/0)

$$\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1-i^2} = \frac{3-4i-1}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

Svar: $1-2i$

8. Lös ekvationen $2\sin 2x = \sqrt{2}$ (2/1/0)

$2\sin 2x = \sqrt{2}$

$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Fall 1

$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2x = \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} + n\cdot 360°$

$2x = 45° + n\cdot 360°$

$x = 22.5° + n\cdot 180°$

Fall 2

$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2x = \left(180° - \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + n\cdot 360°$

$2x = (180 - 45°) + n\cdot 360°$

$2x = 135° + n\cdot 360°$

$x = 67.5° + n\cdot 180°$

Svar: $\begin{cases} x = 22.5° + n\cdot 180° \\ x = 67.5° + n\cdot 180° \end{cases}$

Kommentar: Formelblad Ma 4 > Trigonometri > Exakta värden

avläs ur tabell, $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$

9. Visa att (2/0/0)

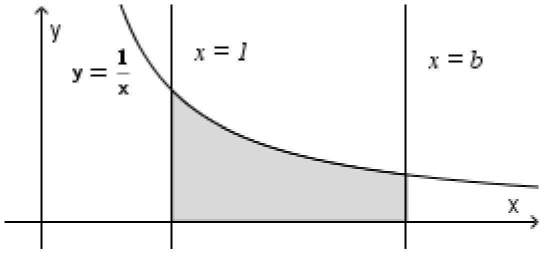
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\text{VL} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1 = 1 + \tan^2 x = \text{HL}$$

10. Det skuggade området i figuren begränsas av kurvan

$y = \dfrac{1}{x}$

x-axeln samt linjerna $x = 1$ och $x = b$, $b > 1$



Bestäm b så att områdets area blir 1 $a.e.$ (2/1/0)

$A = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$

då $A = 1$ $a.e.$ fås ekvationen

$\ln b = 1$

$e^{\ln b} = e^1$

$b = e$

Svar: $b = e \approx 2.7$

11. Bestäm konstanten p så att funktionen $y = 2e^{5x}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + py = 2e^{5x}$ (0/2/0)

$y' = 5 \cdot 2e^{5x} = 10e^{5x}$

$y'' = 5 \cdot 10e^{5x} = 50e^{5x}$

$\mathrm{VL} = 50e^{5x} + p2e^{5x} = 2e^{5x}(25 + p)$

$\mathrm{HL} = 2e^{5x}$

För att få VL = HL måste

$25 + p = 1$

$p = -24$

Svar: $p = -24$

12. Klotformade ballonger blåses upp till volymen 8 $liter$
Ballongens radie ökar med 2 cm/s då radien är 5 cm
Ballongerna blåses upp med tryckluft vilket gör att volymen ökar med konstant hastighet.
Bestäm hur lång tid det tar att blåsa upp en ballong som från början är tom.
Sätt $\pi = 3$ (0/2/2)

$V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ ger
$\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{4\pi \cdot 3r^2}{3} = 4\pi r^2 cm^2$

Då ballongens radie ökar med 2 cm/s fås
$\dfrac{dr}{dt} = 2\ cm/s$

Påfyllningshastigheten är
$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot 2 = 8\pi r^2\ cm^3/s$

Påfyllningshastigheten då $r = 5$ är
$8\pi 5^2 = 200\pi\ cm^3/s$

$t =$ tiden att fylla en ballong
$t = \dfrac{8\ liter}{200\pi\ cm^3/s} = \dfrac{8000\ cm^3}{200\pi\ cm^3/s} = \dfrac{40}{\pi}\ s$
$\pi = 3$ ger
$\dfrac{40}{3} \approx \dfrac{39}{3} = 13\ s$

Svar: Det tar cirka 13 s att blåsa upp en ballong

13. Lös ekvationen $|z|^2 - 4\bar{z} = 1 + 8i$ (0/0/2)

Sätt $z = a + bi \Rightarrow$
$\bar{z} = a - bi$
$|z|^2 = a^2 + b^2$

insättning i ekvationen ger
$a^2 + b^2 - 4(a - bi) = 1 + 8i$
$a^2 + b^2 - 4a + 4bi = 1 + 8i$

identifiering av realdel och imaginärdel i VL och HL ger ekvationssystemet
$\begin{cases} a^2 + b^2 - 4a = 1 \ldots (1) \\ 4b = 8 \ldots (2) \end{cases}$
(2) ger $b = 2$ som sättes in i (1) vilket ger
$a^2 + 2^2 - 4a = 1$
$a^2 - 4a + 3 = 0$
$a = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$
$a_1 = 1$
$a_2 = 3$

Svar: $\begin{cases} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = 3 + 2i \end{cases}$

14. Bevisa att summan av kvadraterna på fem på varandra följande heltal alltid är delbar med fem
Exempel $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 90 = 5 \cdot 18$ (0/0/2)

Om ett av talen är n så är nästa tal $n + 1$
Då kan summan av fem på varandra följnade tal skrivas som
$(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2)$

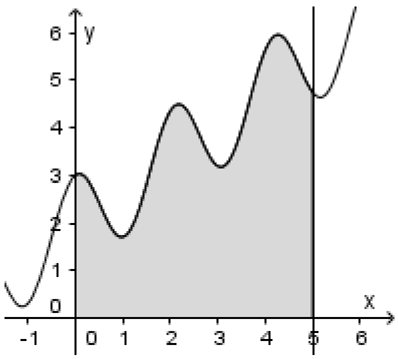
Summan av dess kvadrater blir
$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 =$
$n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 =$
$5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$
som innehåller faktorn 5 och är därmed delbar med 5

Del 2 – Med digitala verktyg
(miniräknare, grafritande räknare, eller motsvarande utan möjlighet till kommunikation)

Namn	Klass	Personnummer (ej fyra sista)

Alla papper ska förses med namn och återlämnas

15. Det skuggade området i figuren begränsas av $f(x) = 0.7x + \cos 3x + 2$
de positiva koordinataxlarna samt linjen $x = 5$



Beräkna områdets area (2/0/0)

Lösningsförslag 1: Enkel räknare.
Räknaren måste vara inställd på radianer när sin(15) beräknas

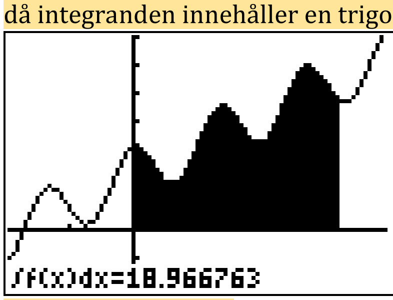
$$A = \int_0^5 (0.7x + \cos 3x + 2)\,dx = \left[0.7 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 2x\right]_0^5 =$$

$$= 0.7 \cdot \frac{5^2}{2} + \frac{\sin(3 \cdot 5)}{3} + 2 \cdot 5 - \left(0.7 \cdot \frac{0^2}{2} + \frac{\sin(3 \cdot 0)}{3} + 2 \cdot 0\right) =$$

$$= 0.35 \cdot 25 + \frac{\sin 15}{3} + 10 \approx 18.97\ a.e.$$

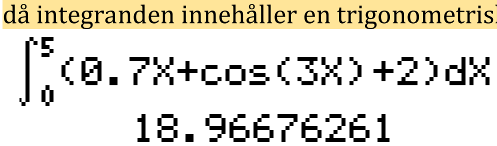
Svar: $A \approx 18.97\ a.e.$

Lösningsförslag 2: Grafritande räknare.
Räknaren måste vara inställd på radianer
då integranden innehåller en trigonometrisk funktion.



Svar: $A \approx 18.97\ a.e.$

Lösningsförslag 3: Räknare med integreringsfunktion.
Räknaren måste vara inställd på radianer
då integranden innehåller en trigonometrisk funktion.

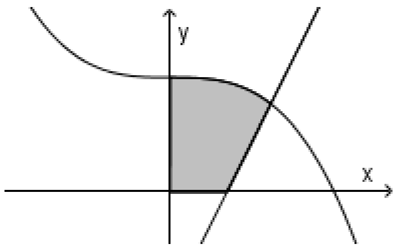


Svar: $A \approx 18.97\ a.e.$

16. Figuren visar graferna till funktionerna

$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 1\,,\; g(x) = 2x - 1$

De två funktionernas grafer innesluter tillsammans med de positiva koordinataxlarna det område som skuggats i figuren.



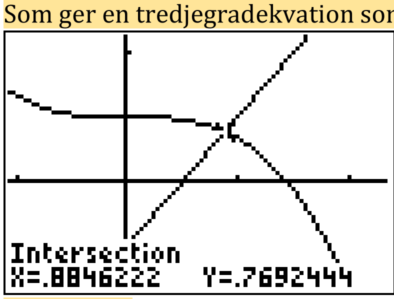
Bestäm arean av det skuggade området.
Svara med minst tre värdesiffror. (2/1/0)

För att hitta skärningspunktens x-koordinat sätt

$f(x) = g(x)$

$-\frac{x^3}{3} + 1 = 2x - 1$

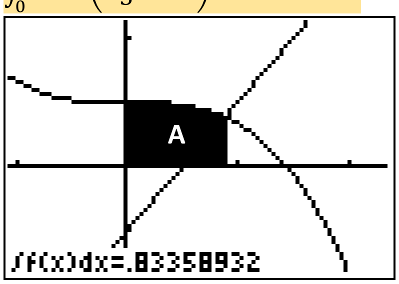
Som ger en tredjegradekvation som lämpligen löses grafiskt



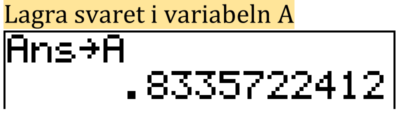
$x = 0.8846$

Beräkna arean under tredjegradskurvan

$\int_0^{0.8846} \left(\frac{-x^3}{3} + 1\right) dx \approx 0.8336$



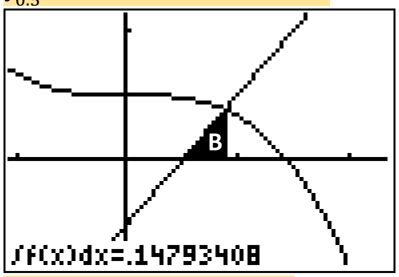
Lagra svaret i variabeln A



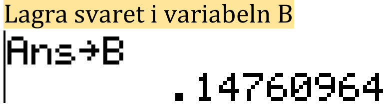
Linjen $y = 2x - 1$ skär x-axeln då $y = 0$ vilket ger ekvationen
$0 = 2x - 1$
$x = 0.5$

Beräkna arean under den räta linjen

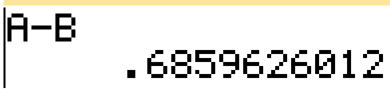
$$\int_{0.5}^{0.8846} (2x - 1)\, dx \approx 0.1479$$



Lagra svaret i variabeln B

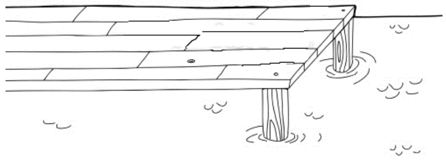


Beräkna sökt area: $0.8336 - 0.1479 = 0.6857$



Svar: 0.686 a.e.

17. Vattendjupet h (i meter) i en hamn varierar enligt funktionen
$h(t) = 1.3\sin(0.524t - 2.5) + 8$ där t är tiden i timmar efter klockan 00.00
    a. Bestäm det högsta och det lägsta vattendjupet samt medelvattendjupet. (2/0/0)
    b. Vid vilken tidpunkt inträffar det första högvattnet? (0/1/0)
    c. Bestäm hur lång tid det är mellan två lågvatten. (0/1/0)



a.
$-1 \le \sin x \le 1$
$-1 \le \sin(0.524t - 2.5) \le 1$

högsta vattendjup: $1.3 + 8 = 9.3$ m
lägsta vattendjup: $-1.3 + 8 = 6.7$ m
medelvattendjupet: 8 m

Svar: 9.3 m , 6.7 m samt 8 m

b.
Lösningsförslag 1 med enkel räknare
$h'(t) = 1.3\cos(0.524t - 2.5) \cdot 0.524$
$h'(t) = 0.681\cos(0.524t - 2.5)$
$h'(t) = 0$ ger
$0.681\cos(0.524t - 2.5) = 0$
$\cos(0.524t - 2.5) = 0$
$0.524t - 2.5 = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

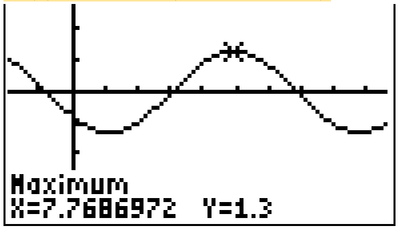
Fall 1
$0.524t = 2.5 - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
$0.524t = 0.929 + n \cdot 2\pi$
$t = \frac{0.929}{0.524} + n \cdot \frac{2\pi}{0.524}$
$t = 1.77 + n \cdot 11.99$
vid första extrempunkten är $n = 0 \;\Rightarrow\; t = 1.77$ h $= 1$ h 46 min
Avgör om extrempunkten är en min- eller maxpunkt med andraderivatan
$h''(t) = -0.356\sin(0.524t - 2.5)$
$h''(1.77) = -0.356\sin(0.524 \cdot 1.77 - 2.5) = 0.35 > 0 \Rightarrow$ minimum

Fall 2
$0.524t = 2.5 + \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
$0.524t = 4.07 + n \cdot 2\pi$
$t = \frac{4.07}{0.524} + n \cdot \frac{2\pi}{0.524}$
$t = 7.77 + n \cdot 11.99$
vid första extrempunkten är $n = 0 \;\Rightarrow\; t = 7.77$ h $= 7$ h 46 min
Avgör om extrempunkten är en min- eller maxpunkt med andraderivatan
$h''(7.77) = -0.356\sin(0.524 \cdot 7.77 - 2.5) = -0.35 < 0 \Rightarrow$ maximum
Tidpunkten för första högvattnet är $00.00 + 7\ h\ 46$ min

Svar: 07.46

Lösningsförslag 2: Grafritande räknare

$h(t) = 1.3\sin(0.524t - 2.5)$



$7.77 \text{ h} = 7\text{h} + \frac{0.77}{60} \text{ min} = 7\text{h } 46 \text{ min}$

Tidpunkten för första högvattnet är $00.00 + 7 \text{ h } 46 \text{ min}$

Svar: 07.46

c.

Lösningsförslag 1: Enkel räknare

Från uppgift a fås att lågvattnen inträffar då

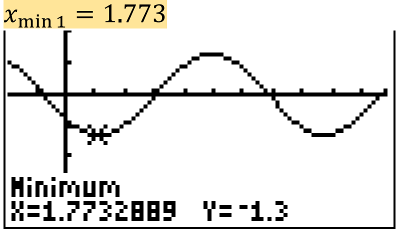
$t = 1.77 + n \cdot 11.99$

Avståndet mellan två tidpunkter är 11.99 h

Svar: 12 h = ett halvt dygn

Lösningsförslag 2: Grafritande räknare

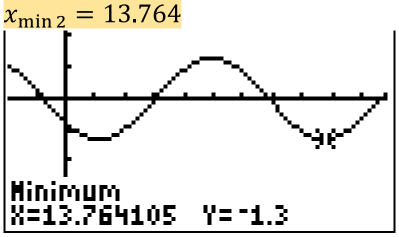
$x_{\text{min 1}} = 1.773$



Lagra svaret i A

```
Ans→A
        1.773291322
```

$x_{\text{min 2}} = 13.764$



Lagra svaret i B

```
Ans→B
        13.76410103
```

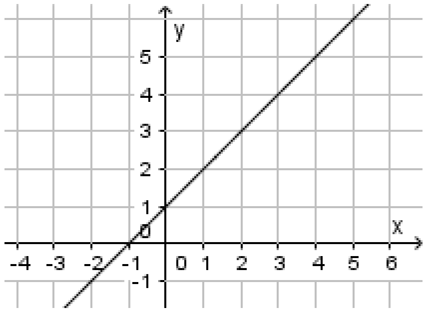
Beräkna avståndet

```
B-A
        11.99080971
```

tid det mellan två lågvattet 11.99 h ≈ 12 h

Svar: 12 h = ett halvt dygn

18. Funktionen F är en primitiv funktion till f
Figuren nedan visar $y = F(x)$



Bestäm (0/1/0)

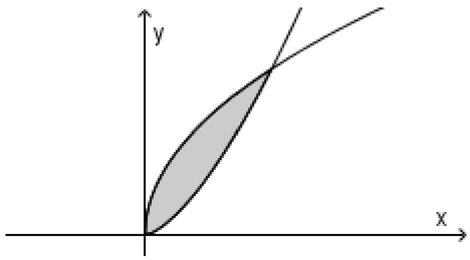
$$\int_2^4 f(x)\,dx$$

$$\int_2^4 f(x)\,dx = [F(x)]_2^4 = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2)$$

$\mathrm{F}(4)$ och $\mathrm{F}(2)$ avläses ur grafen ovan vilket ger
$\mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2) = 5 - 3 = 2$

Svar: 2

19. Kurvorna $y = 4x^{0,5}$ och $y = x\sqrt{x}$ begränsar ett område.



Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår
då detta område roterar kring x-axeln. (0/1/2)

Låt $f(x) = 4x^{0.5}$ och $g(x) = x\sqrt{x} = x \cdot x^{0.5} = x^{1.5}$
skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen
$f(x) = g(x)$
$4x^{0,5} = x^{1.5}$
$4 = \dfrac{x^{1.5}}{x^{0,5}}$
$4 = x^{1.5-0.5}$
$x = 4$
V = Volym av rotationskropp

$$V = \pi \int_0^4 (4x^{0.5})^2\,dx - \pi \int_0^4 (x^{1.5})^2\,dx =$$

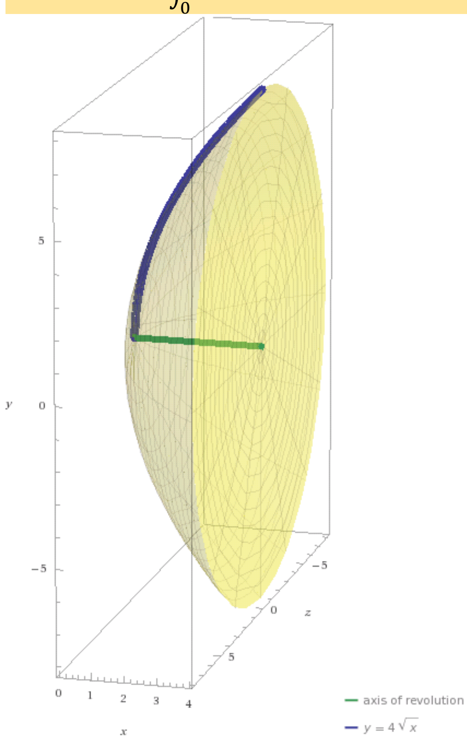
$$\pi \int_0^4 16\,x\,dx - \pi \int_0^4 x^3\,dx =$$

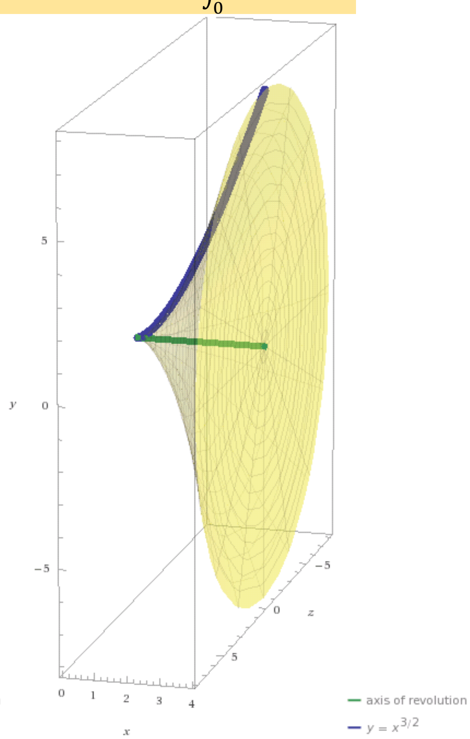
$$\pi \int_0^4 (16x - x^3)\,dx = \pi \left[16\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \pi \left[8x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \pi\left(8 \cdot 4^2 - \frac{4^4}{4}\right) = \pi(128 - 64) = 64\pi$$

Svar: $64\pi \approx 201$ v. e.

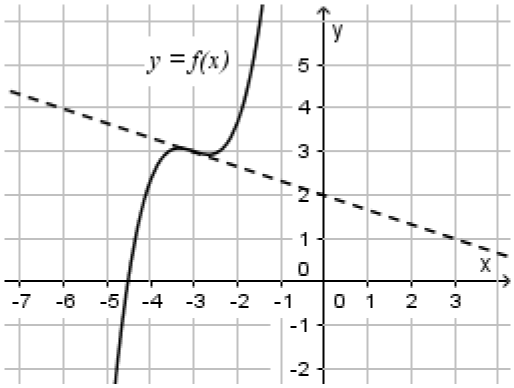
Bilder från Wolfram Alpha: $V_1 - V_2$ ger sökt volym

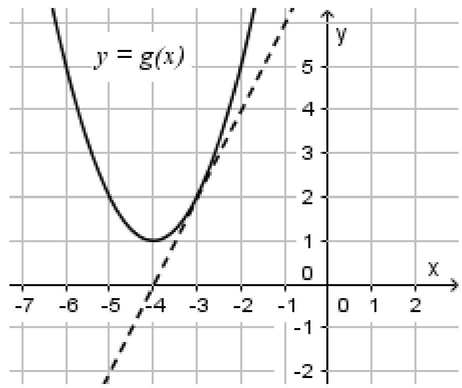
$$V_1 = \pi \int_0^4 (4x^{0.5})^2\,dx \qquad\qquad V_2 = \pi \int_0^4 (x^{1.5})^2\,dx$$





20. Figurerna visar kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$
samt tangenterna till dessa för $x = -3$





Låt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ och bestäm $h'(-3)$ (0/0/2)

$h(x) = f(x) \cdot g(x)$
$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$h'(-3) = f'(-3) \cdot g(-3) + f(-3) \cdot g'(-3)$

Avläsning i graferna ger
$f'(-3) = -\frac{1}{3}$
$g(-3) = 2$
$f(-3) = 3$
$g'(-3) = 2$

Insättning ger
$h'(-3) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

Svar: $h'(-3) = \frac{16}{3}$