

Prövning matematik 4

26 feb 2016 (prövningstillfälle 4)

Namn	Klass	Personnummer (ej fyra sista)

Mobiltelefonnummer	e-post

Alla papper ska förseas med namn och återlämnas

Skriv tydligt. Oläsliga lösningar kan givetvis inte rättas och därmed inte ge några poäng.

Skrivtid: 180 minuter

Hjälpmedel: Formelblad, samt på del 2 digitala verktyg

Redovisning: I alla uppgifter – om det inte står (*endast svar krävs*) – krävs någon form av redovisning.

Redovisa dina beräkningar, motivera dina lösningar och rita figurer vid behov.

Kravgränser

Provet består av två delprov, del 1 utan digitala verktyg och del 2 med digitala verktyg

Tillsammans kan de ge 45 poäng varav 18 E-, 16 C-, 11-A-poäng

E: 12 poäng

D: 17 poäng varav 5 poäng på minst C-nivå

C: 23 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå

B: 30 poäng varav 3 poäng på A-nivå

A: 36 poäng varav 6 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar.

Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa.

Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar.

Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar

och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Derivera

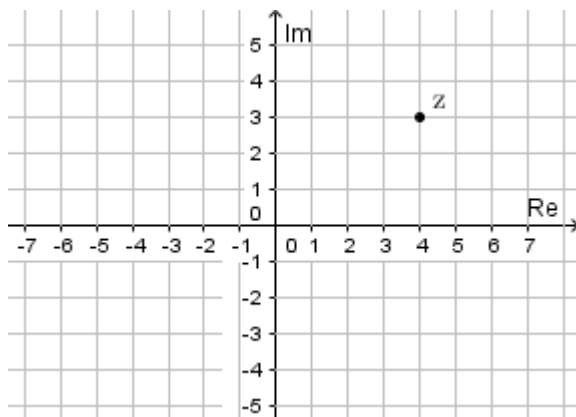
a. $f(x) = \sin 3x$ (endast svar krävs)

(1/0/0)

b. $g(x) = (1 - 5x)^4$ (endast svar krävs)

(1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talet z är markerat.



a. Markera talet \bar{z} i talplanet ovan (endast svar krävs)

(1/0/0)

b. Bestäm $z \cdot \bar{z}$

(1/0/0)

3. För de komplexa talen z och w gäller

$$z = 5 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

a. Bestäm

(1/0/0)

$$\left| \frac{z}{w} \right|$$

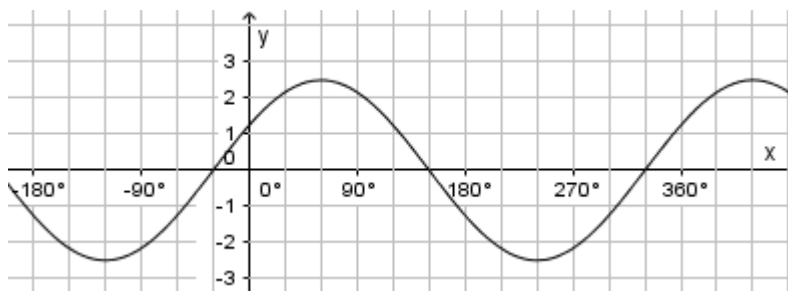
b. Bestäm

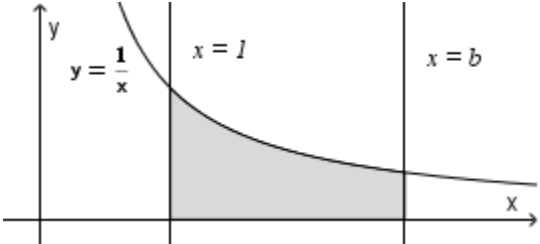
(1/0/0)

$$\arg \left(\frac{z}{w} \right)$$

4. Ange kurvan i figuren som en cosinusfunktion.

(0/2/0)



5. Bestäm konstanten b så att polynomet $p(x) = x^6 + 5x^4 - 10x + b$ blir delbart med faktorn $(x - 1)$ (0/1/0)
6. $z_0 = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$ är en rot till ekvationen $z^8 = w$
Bestäm en annan rot till samma ekvation (0/0/1)
7. Beräkna $\frac{3 - i}{1 + i}$
och svara på formen $a + bi$ (0/2/0)
8. Lös ekvationen $2 \sin 2x = \sqrt{2}$ (2/1/0)
9. Visa att $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ (2/0/0)
10. Det skuggade området i figuren begränsas av kurvan $y = 1/x$, x -axeln samt linjerna $x = 1$ och $x = b$, $b > 1$
- 
- Bestäm b så att områdets area blir 1 a. e. (2/1/0)
11. Bestäm konstanten p så att funktionen $y = 2e^{5x}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + py = 2e^{5x}$ (0/2/0)
12. Klotformade ballonger blåses upp till volymen 8 liter
Ballongens radie ökar med 2 cm/s då radien är 5 cm
Ballongerna blåses upp med tryckluft vilket gör att volymen ökar med konstant hastighet.
Bestäm hur lång tid det tar att blåsa upp en ballong som från början är tom.
Sätt $\pi = 3$ (0/2/2)
13. Lös ekvationen $|z|^2 - 4\bar{z} = 1 + 8i$ (0/0/2)
14. Bevisa att summan av kvadraterna på fem på varandra följande heltal alltid är delbar med fem
Exempel $2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 90 = 5 \cdot 18$ (0/0/2)

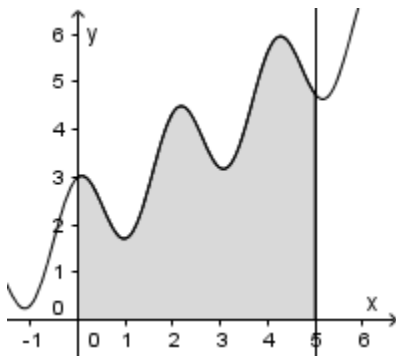
Del 2 – Med digitala verktyg

(miniräknare, grafitrande räknare, eller motsvarande utan möjlighet till kommunikation)

Namn	Klass	Personnummer (ej fyra sista)

Alla papper ska förses med namn och återlämnas

15. Det skuggade området i figuren begränsas av $f(x) = 0.7x + \cos 3x + 2$ de positiva koordinataxlarna samt linjen $x = 5$



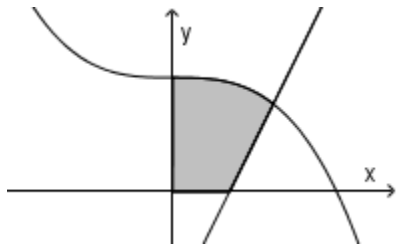
Beräkna områdets area

(2/0/0)

16. Figuren visar graferna till funktionerna

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 1, \quad g(x) = 2x - 1$$

De två funktionernas grafer innesluter tillsammans med de positiva koordinataxlarna det område som skuggats i figuren.



Bestäm arean av det skuggade området.

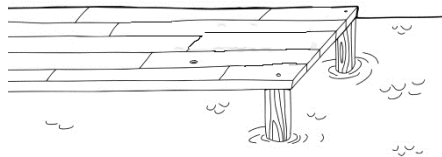
Svara med minst tre värdesiffror.

(2/1/0)

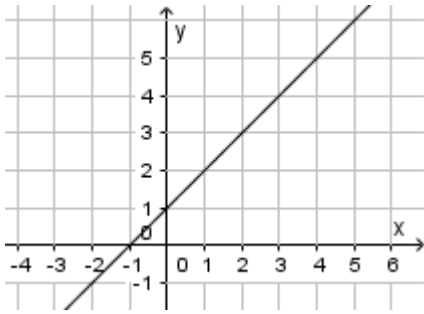
17. Vattendjupet h (i meter) i en hamn varierar enligt funktionen

$$h(t) = 1,3 \sin(0,524t - 2,5) + 8 \text{ där } t \text{ är tiden i timmar efter klockan 00.00}$$

- Bestäm det högsta och det lägsta vattendjupet samt medelvattendjupet. (2/0/0)
- Vid vilken tidpunkt inträffar det första högvattnet? (0/1/0)
- Bestäm hur lång tid det är mellan två lågvatten. (0/1/0)



18. Funktionen F är en primitiv funktion till f
 Figuren nedan visar $y = F(x)$

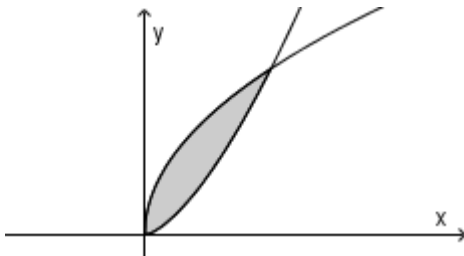


Bestäm

$$\int_2^4 f(x) dx$$

(0/1/0)

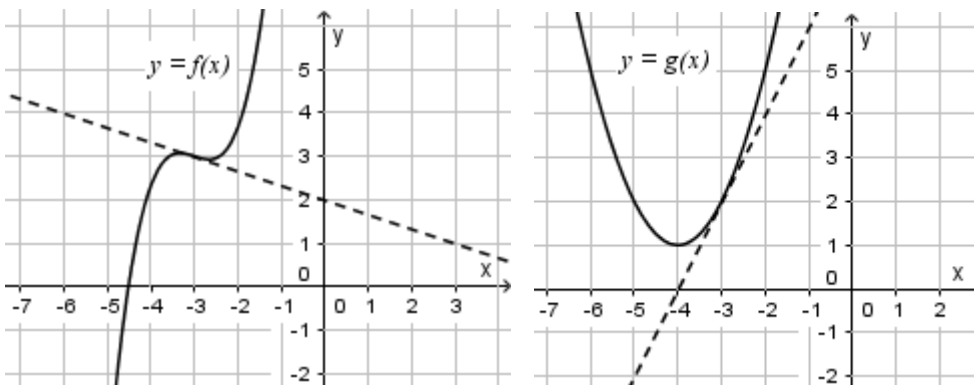
19. Kurvorna $y = 4x^{0.5}$ och $y = x\sqrt{x}$ begränsar ett område.



Beräkna volymen av den rotations kropp som uppstår
 då detta område roterar kring x-axeln.

(0/1/2)

20. Figuren visar kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$
 samt tangenterna till dessa för $x = -3$



Låt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ och bestäm $h'(-3)$

(0/0/2)