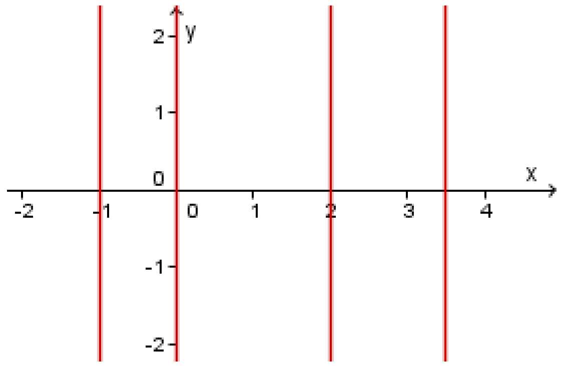
Övningsprov Origo 2b kap 3 , LONG version

Lösningsförslag - *one* possible solution path

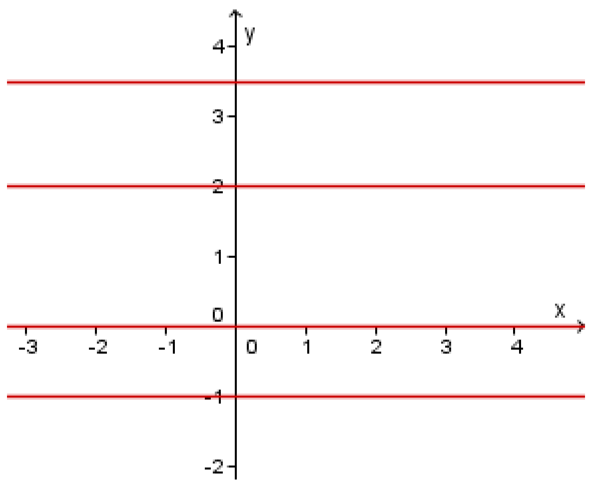
Om ej annat anges krävs fullständiga lösningar,
endast svar $0\ p$

1. Bestäm linjernas
   a) ekvationer (1/0/0)
   b) riktningskoefficient, k (1/0/0)



a) $x = -1$
$x = 0$, y-axeln är också $x = 0$
$x = 2$
$x = 3.5$
b) Samtliga linjer saknar k-värde,
k-värde existerar ej för vertikala linjer.

2. Bestäm linjernas
   a) ekvationer (1/0/0)
   b) riktningskoefficient, k (1/0/0)



a) $y = -1$
$y = 0$, x-axeln är också $y = 0$
$y = 2$
$y = 3.5$
b) Samtliga linjer har riktningskoefficienten,
$k = 0$
alla horisontella linjer har lutningen noll.

3. Bestäm ekvationen för den räta linje som har riktningskoefficienten -2 och går genom punkten med koordinaterna $(-4, 12)$ (2/0/0)

$y = kx + m$ gäller för alla räta linjer, vi vet att

$k = -2$

$x = -4$

$y = 12$

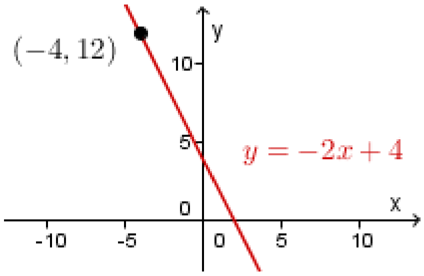
ger ekvationen

$12 = (-2)(-4) + m$

$12 = 8 + m$

$m = 4$

Svar: $y = -2x + 4$



4. Bestäm ekvationen för den räta linje går genom punkterna med koordinaterna $(1, -2)$ och $(3, 4)$ (2/0/0)

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$y = kx + m$ gäller för alla räta linjer, vi vet att

$k = 3$

$x = 1$

$y = -2$

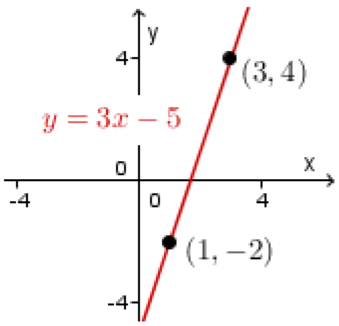
ger ekvationen

$-2 = 3 \cdot 1 + m$

$-2 - 3 = m$

$m = -5$

Svar: $y = 3x - 5$



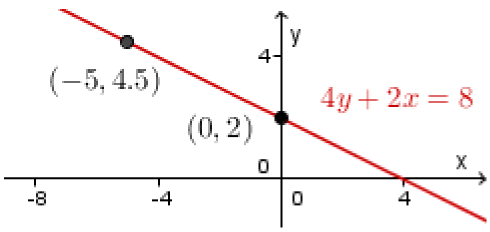
5. En rät linje har ekvationen $4y + 2x = 8$, bestäm två punkter på linjen. (2/0/0)

Om $x = 0$ fås

$4y + 2 \cdot 0 = 8$

$4y = 8$

$y = 2$
ger punkten $(0, 2)$
Om $x = -5$ fås
$4y + 2 \cdot (-5) = 8$
$4y - 10 = 8$
$4y = 18$
$y = 4.5$
ger punkten $(-5, 4.5)$
Svar: till exempel $(0, 2)$ och $(-5, 4.5)$
Det finns oändligt många punkter som ligger på linjen, sålunda oändligt många rätta svar



6. $y = 2x + 3$ Ange en lösning till ekvationen. (1/0/0)

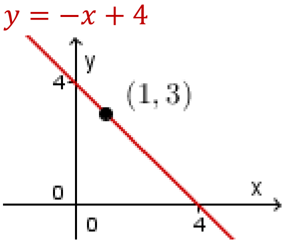
Om till exempel $x = 10$ blir $y = 23$

Svar: $\begin{cases} x = 10 \\ y = 23 \end{cases}$ är en lösning till ekvationen,

dvs gör att $VL = HL$ i ekvationen

7. Du har ekvationen $y = -x + 4$
   a) Ange en lösning till ekvationen (1/0/0)
   b) Hur många lösningar finns till ekvationen? (1/0/0)

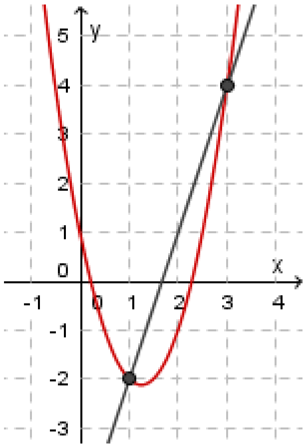
a) Om $x = 1$ fås
$y = -1 + 4$
$y = 3$
ger lösningen
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$
som också kan ses som en punkt $(1, 3)$ på linjen
$y = -x + 4$



b) Det finns oändligt många lösningar till ekvationen, och det finns oändligt många punkter som ligger på linjen.

8. Bestäm lösningen till ekvationssystemet med hjälp av figuren nedan.

$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ (2/0/0)



Avläsning i figuren av skärningspunkternas koordinater ger två lösningar

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

9. Bestäm avståndet mellan punkterna med koordinaterna $(2, -1)$ och $(7, 3)$ (2/0/0)

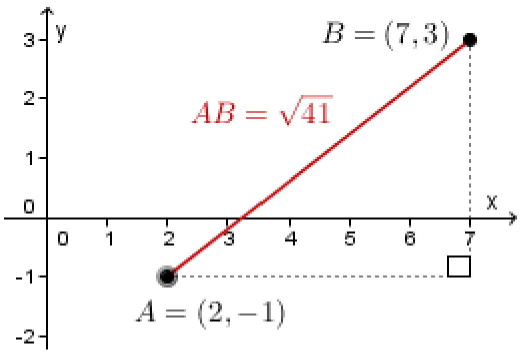
Avståndsformeln

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ger

$d = \sqrt{(7-2)^2 + \left(3-(-1)\right)^2} =$

$\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

Svar: $\sqrt{41}\ l.e.$



10. Bestäm längden av sträckan mellan punkterna $(-2, 3)$ och $(5, 1)$ (2/0/0)

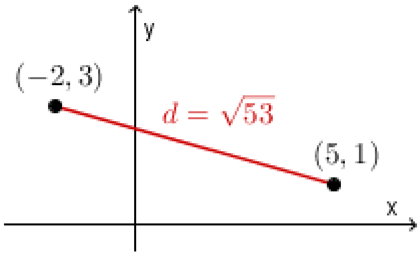
Avståndsformeln:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ger

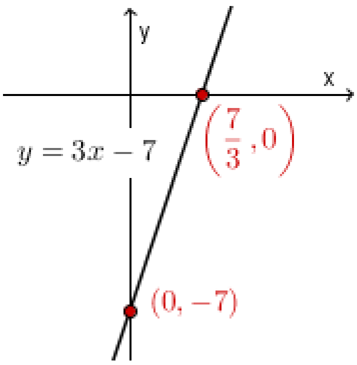
$d = \sqrt{\left(5-(-2)\right)^2 + (1-3)^2} =$

$\sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

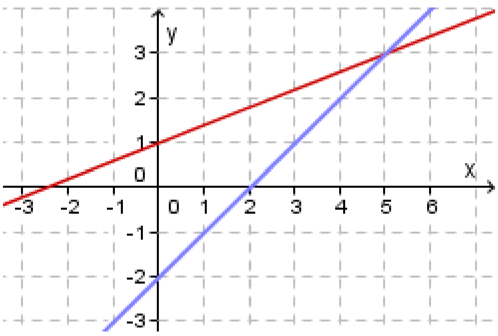
Svar: $\sqrt{53} \approx 7.28\ l.e.$



11. Var skär grafen till funktionen $y = 3x - 7$
    a) x-axeln (1/0/0)
    b) y-axeln (1/0/0)
    a) Grafen skär x-axeln då $y = 0$
    vilket ger ekvationen
    $0 = 3x - 7$
    $3x = 7$
    $x = \frac{7}{3}$
    Svar: i punkten
    $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$
    b) Grafen skär y-axeln då $x = 0$
    vilket ger ekvationen
    $y = 3 \cdot 0 - 7$
    $y = -7$
    Svar: i punkten
    $(0, -7)$



12. Grafen till ett ekvationssystem visas nedan.
    a) Beräkna dess lösning genom avläsning (1/0/0)
    b) Vilket är ekvationssystemet? (0/2/0)



a) Det finns bara en punkt som ligger
på båda linjerna, skärningspunkten,

denna är lösning till ekvationssystemet

Svar: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

b) Den röda linjen har

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{5} = 0.4$

och $m = 1$ vilket ger ekvationen

$y = 0.4x + 1$

Den blåa linjen har

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$

och $m = -2$ vilket ger ekvationen

$y = x - 2$

Svar: $\begin{cases} y = 0.4x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$

13. Ekvationen $4y + 2x = 8$ bestämmer en rät linje.

a) Bestäm linjens riktningskoefficient (0/1/0)

b) Ge exempel på en linje som är parallell med linjen ovan. (1/1/0)

a) Skriv om ekvationen på k-form genom att lösa ut y vilket ger

$4y = -2x + 8$

$y = \frac{-2x + 8}{4}$

$y = -\frac{2x}{4} + \frac{8}{4}$

$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 2$

Avläs k-värdet

Svar: linjens riktningskoefficient är

$k = -\frac{1}{2}$

b) Om linjen ska vara parallell, med ovan nämda linje, så har den samma k-värde, dvs

$k = -\frac{1}{2}$

Vi kan fritt välja m-värde till exempel $m = 0$ vilket ger den nya linjens ekvation

$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 0$

Svar: Ett exempel på parallell linje är

$y = -\frac{1}{2}x$

14. Bestäm k så att linjen $y = kx - 4$ blir vinkelrät mot (0/2/0)

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

För vinkelräta linjer gäller att produkten av riktningskoefficienterna är -1 , dvs

$k_1 \cdot k_2 = -1$
vilket ger ekvationen

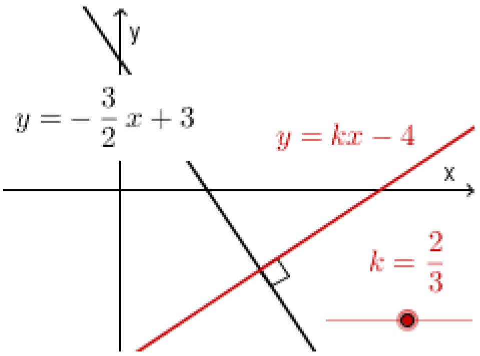
$k_1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$

$k_1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

$k_1 = \frac{2}{3}$

Svar:

$k = \frac{2}{3}$



15. Avgör om linjen som bestäms av ekvationen
$4x + 2y = 14$ är vinkelrät mot (0/2/0)

$y = \frac{x+1}{2}$

Skriv om ekvationerna på k-form genom att
lösa ut y och avläsa k-värdet
Första ekvationen

$4x + 2y = 14$

$2y = -4x + 14$

$y = -\frac{4x}{2} + \frac{14}{2}$

$y = -2x + 7$

har $k_1 = -2$

Andra ekvationen

$y = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

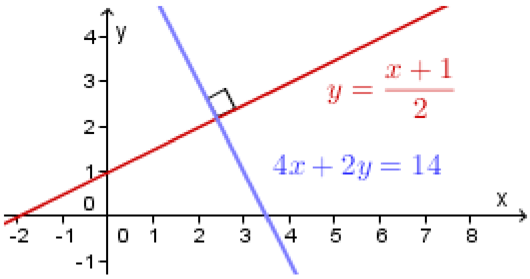
har

$k_2 = \frac{1}{2}$

För vinkelräta linjer gäller att
$k_1 \cdot k_2 = -1$ insättning ger

$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

Svar: Linjerna är vinkelräta



16. Lös ekvationssystemet med

substitutionsmetoden $\begin{cases} 4x + y = 14 \\ x + 5y = 13 \end{cases}$ (1/1/0)

$\begin{cases} 4x + y = 14 \ldots (1) \\ x + 5y = 13 \ldots (2) \end{cases}$

Lös ut y ur (1) ger

$y = 14 - 4x \ldots (3)$

(3) i (2) ger

$x + 5(14 - 4x) = 13$

$x + 70 - 20x = 13$

$57 = 19x$

$x = 3 \ldots (4)$

(4) i (3) ger

$y = 14 - 4 \cdot 3 = 2$

Svar: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

17. Lös ekvationssystemet med

additionsmetoden $\begin{cases} 3a + 2b = 7 \\ 2a - 3b = -4 \end{cases}$ (1/1/0)

$\begin{cases} 3a + 2b = 7 \ldots (1) \\ 2a - 3b = -4 \ldots (2) \end{cases}$

Multiplicera (1) med 3 och (2) med 2 ger

$\begin{cases} 9a + 6b = 21 \\ 4a - 6b = -8 \end{cases}$

Addera

$$\begin{array}{rr} & 9a + 6b = 21 \\ + & 4a - 6b = -8 \\ \hline & 13a \quad = 13 \end{array}$$

$a = 1 \ldots (3)$

(3) i (1) ger

$3 \cdot 1 + 2b = 7$

$2b = 7 - 3$

$b = 2$

Svar: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

18. Lös ekvationssystemet

grafiskt $\begin{cases} 3y + 1.5x = 12 \\ 2y - 5x + 2 = 0 \end{cases}$ (1/1/0)

Skriv om ekvationerna på k-form, dvs lös ut y

Första ekvationen

$3y = -1.5x + 12$

$y = -\frac{1.5x}{3} + \frac{12}{3}$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$

Andra ekvationen

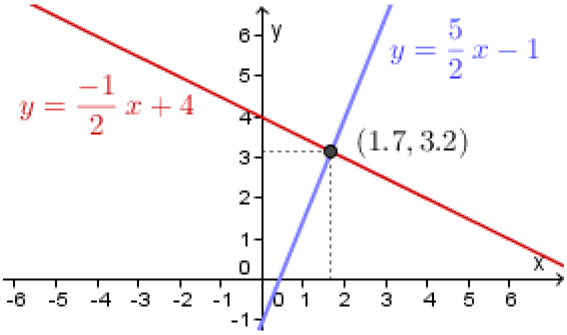
$2y = 5x - 2$

$y = \frac{5x}{2} - \frac{2}{2}$

$y = \frac{5}{2}x - 1$

Rita graferna i ett koordinatsystem

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = \frac{5}{2}x - 1 \end{cases}$$



Om man ritar för hand fås en approximativ (ungefärlig) lösning.

Har man ett tekniskt hjälpmedel så fås lösningen till

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \approx 1.667 \\ y = \frac{19}{6} \approx 3.167 \end{cases}$$

19. Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln $y = 2x^2$ och den räta linjen $y = 4x + 6$ (0/2/0)

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$$

$y = y$ ger

$2x^2 = 4x + 6$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

pq-formeln ger

$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$

$x = 1 \pm 2$

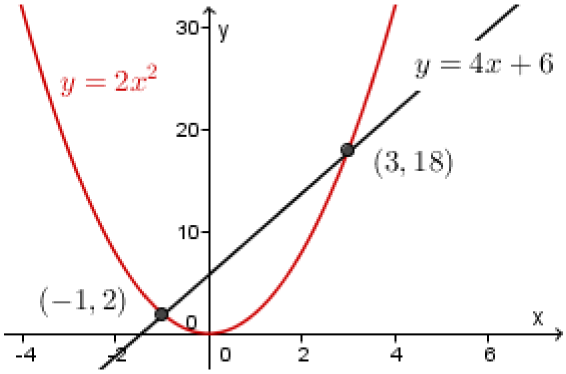
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

insättning i ekvationen $y = 2x^2$ ger

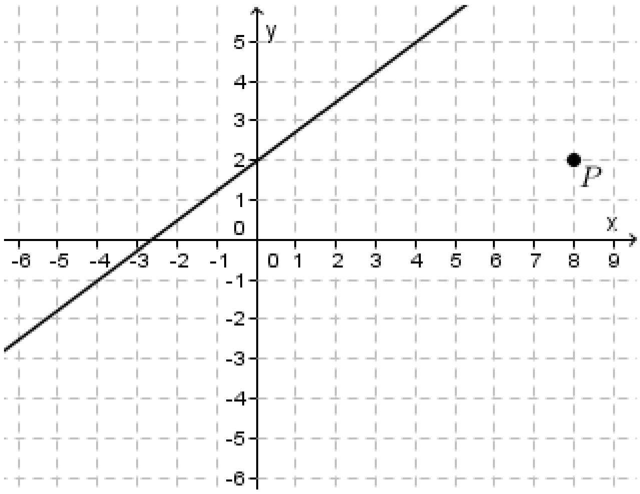
$y(3) = 2 \cdot 3^2 = 18$

$y(-1) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$

Svar: $(-1, 2)$ och $(3, 18)$



20. Ange en ekvation för den linje som som går genom punkten P och är parallell med linjen i figuren (0/2/0)



Grafisk lösning:

k-värdet för linjen avläses ur grafen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}$$

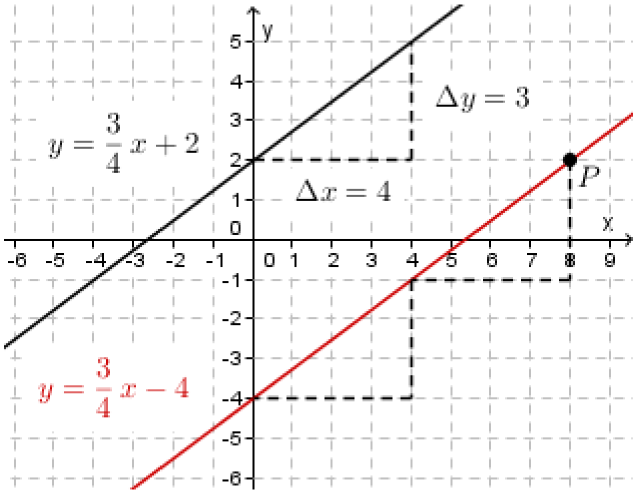
Eftersom de ska vara parallella är k-värdet för linjen genom punkten också

$$k = \frac{3}{4}$$

Börja nu i punkten och
gå i riktning mot skärningen med y-axeln,
och avläs $m = -4$

Svar:

$$y = \frac{3}{4}x - 4$$



21. Bestäm konstanten t så att ekvationssystemet saknar lösning

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ 4x - ty = 26 \end{cases}$$ (0/2/1)

Grafen till båda ekvationerna utgör en rät linje i ett koordinatsystem.

Ekvationssystemet saknar lösning om linjerna är parallella och inte sammanfaller.

Skriv om ekvationerna på formen $y = kx + m$

Lös ut y ur den första ekvationen

$6x + 3y = 12$

$3y = -6x + 12$

$y = -\frac{6x}{3} + \frac{12}{3}$

$y = -2x + 4$

riktningskoefficienten är $k_1 = -2$

Lös ut y ur den andra ekvationen

$4x - ty = 26$

$4x - 26 = ty$

$\frac{4x}{t} - \frac{26}{t} = y$

$y = \frac{4}{t}x - \frac{26}{t}$

riktningskoefficienten är $k_2 = \frac{4}{t}$

Då linjerna ska vara parallella så är $k_1 = k_2$

vilket ger ekvationen

$-2 = \frac{4}{t}$

$t = \frac{4}{-2}$

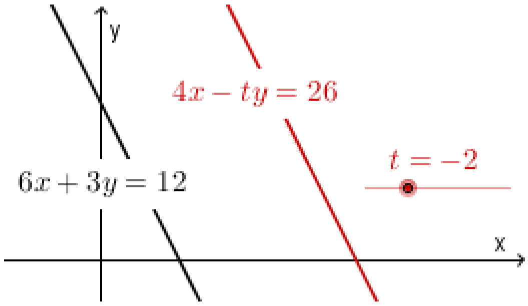
$t = -2$

Med $t = -2$ fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -2x - 13 \end{cases}$$

Vi ser ekvationerna har samma k-värde, men olika m-värde.

Svar: $t = -2$



22. Ange värden på konstanterna a och b så att ekvationssystemet får oändligt antal lösningar (0/2/1)

$$\begin{cases} 3y = ax + 3 \ldots (1) \\ 2y = 3x + b \ldots (2) \end{cases}$$

Om ekvationerna är ekvivalenta,
så beskriver de samma räta linje.
x-termerna kan justeras till likhet
med hjälp av a och konstanttermerna
kan justeras till likhet med b
Börja därför med att multiplicera
ekvationerna med lämpliga tal
så att y-termerna blir lika.
$(1) \cdot 2$ och $(2) \cdot 3$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6y = 2ax + 6 \\ 6y = 9x + 3b \end{cases}$$

Identifiering för att skapa lika termer
i ekvationssystemet ovan ger

$2a = 9$

$a = 4.5$

och

$3b = 6$

$b = 2$

Svar: $a = 4.5$ och $b = 2$

23. Vilken riktningskoefficient har en linje som är vinkelrät mot linjen $y = 2x + 3$ (1/1/0)

För vinkelräta linjer gäller att produkten av
riktningskoefficienterna är -1 , dvs

$k_1 \cdot k_2 = -1$

$y = 2x + 3$ har riktningskoefficienten $k_1 = 2$
vilket ger ekvationen

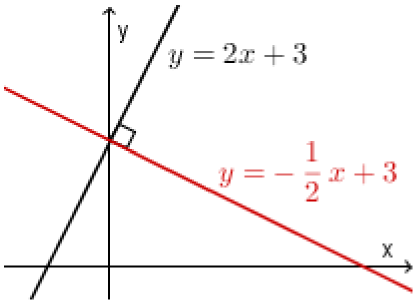
$2 \cdot k_2 = -1$

$$k_2 = -\frac{1}{2}$$

Vilket är det samma som den
negativa inversen.

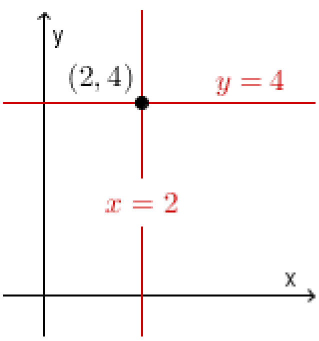
Svar:

$$k = -\frac{1}{2}$$



24. Ange ekvationen för den linje som går genom punkten med koordinaterna $(2, 4)$ och är
    a) Parallell med x-axeln (1/0/0)
    b) Motivera resultatet i a) (0/1/0)
    c) Parallell med y-axeln (1/0/0)
    d) Motivera resultatet i c) (0/1/0)

    a) Svar: $y = 4$
    b) En linje parallell med x-axeln har $k = 0$
    Då linjen går genom punkten $(2, 4)$ så är
    $x = 2$ och $y = 4$
    insättning i $y = kx + m$ ger
    $4 = 0 \cdot 2 + m$ ger
    $m = 4$
    Ekvationen blir
    $y = 0 \cdot 2 + 4$
    $y = 4$
    En funktion som alltid är parallell med
    y-axeln ändrar aldrig värde och är
    därmed oberoende av x
    Svar: $y = 4$
    c) Svar: $x = 2$
    d) En linje parallell med y-axeln är lodrät
    och saknar k-värde
    Då linjen går genom punkten $(2, 4)$ så är
    är dess ekvation $x = 2$
    Alla punkter punkter på den lodräta linjen
    $x = 2$ har x-koordinaten 2
    Svar: $x = 2$



25. Den räta linjen

$y = \frac{3}{4}x - 3$
är skriven i k-form,
skriv den i allmän form $ax + by + c = 0$
och ange talen a, b och c (0/2/0)

$\left(y = \frac{3}{4}x - 3\right) \cdot 4$

$4y = 4 \cdot \frac{3}{4}x - 4 \cdot 3$

$4y = 3x - 12$

$3x - 4y - 12 = 0$

Jämför med

$ax + by + c = 0$

Identifiering av koefficienterna ger

$a = 3\,, b = -4$ och $c = -12$

26. Vilket värde ska t ha om punkten
med koordinaterna $(2, 3)$ ska ligga
på linjen $3x - ty + 7 = 0$ (0/2/0)

I punkten $(2, 3)$ är $x = 2$ och $y = 3$
som vid insättning i ekvationen ger

$3 \cdot 2 - t \cdot 3 + 7 = 0$

$13 = 3t$

$t = \frac{13}{3}$

27. Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln
$y = 2x^2$ och den räta linjen $y = 4x + 6$ (0/2/0)

$y =$ ger ekvationen

$2x^2 = 4x + 6$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

pq-formel ger

$x = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3}$

$x = 1 \pm 2$

$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$y(3) = 2 \cdot 3^2 = 18$

$y(-1) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$

Svar: Punkterna är $(3, 18)$ och $(-1, 2)$

28. Bestäm talet b så att linjen genom punkterna
med koordinaterna $(1, b)$ och $(3, 3b)$
har riktningskoefficienten 5 (0/2/0)

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ger ekvationen

$5 = \frac{3b - b}{3 - 1}$

$b = 5$

Svar: $b = 5$

29. Bestäm ekvationen till linjen som går genom punkterna med koordinaterna $(1, 2)$ och $(a, 2a)$ (0/2/0)

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2a - 2}{a - 1} = \frac{2(a-1)}{a-1} = 2$

$y = kx + m$ där $k = 2$, $x = 1$ och $y = 2$

ger ekvationen

$2 = 2 \cdot 1 + m$

$m = 0$

Svar: $y = 2x$

30. Bestäm linjens ekvation i k-form (0/2/0)

$\frac{y-4}{5} - 2(3x + 2) = 2$

Vi ska helt enkelt lösa ut y

$\frac{y-4}{5} - (2 \cdot 3x + 2 \cdot 2) = 2$

$\frac{y-4}{5} - 6x - 4 = 2$

$\left(\frac{y-4}{5} - 6x - 4 = 2\right) \cdot 5$

$y - 4 - 30x - 20 = 10$

$y = 30x + 34$

31. Bestäm arean av det område som begränsas av linjerna

$y = x + 3$

$y = -2x + 6$

och de båda positiva koordinataxlarna. (0/1/1)

Börja med att bestämma skärningspunkten mellan linjerna

$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$

$y = y$ ger ekvationen

$x + 3 = -2x + 6$

$3x = 3$

$x = 1$ sättes in i översta ekvationen

$y = 1 + 3$

$y = 4$

Höjden i triangeln är 4

Skärningspunkter mellan linjerna och x-axeln fås genom att sätta $y = 0$

$0 = x + 3$ ger $x = -3$

$0 = -2x + 6$ ger $x = 3$

Avstånd mellan skärningspunkterna

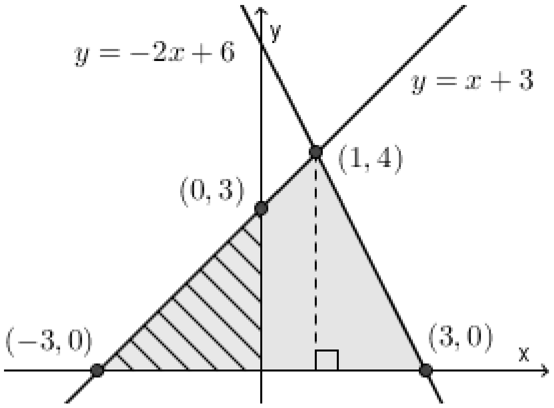
$3 - (-3) = 6$ ger basen i triangeln

$A_{hela\ triangeln} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$

$A_{streckad\ triangel} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$

$A_{sökt\ område} = 12 - 4.5 = 7.5$

Svar: Sökt area är 7.5 $a.e.$



32. Bestäm konstanterna p och q

så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = px + q \\ py = 5 - qx \end{cases}$$

har lösningen

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

(0/1/1)

Sätt in givna värden på x och y

i ekvationssystemet ovan

$$\begin{cases} 3 = p \cdot 1 + q \\ p \cdot 3 = 5 - q \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = p + q \\ 3p = 5 - q \end{cases}$$

Addera ekvationerna

$3 + 3p = p + 5$

$p = 1$ sättes in i lämplig ekvation ovan

$3 = 1 + q$

$q = 2$

Svar: $\begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

33. Punkten $(a, 5)$ ligger lika långt från

punkten $(4, 2)$ som från $(2, 3)$.

Bestäm talet a. (0/1/1)

Avståndsformeln ger

$d_1 = \sqrt{(a-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$

$d_2 = \sqrt{(a-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + 9}$

$d_1 = d_2$

$\sqrt{(a-2)^2 + 4} = \sqrt{(a-4)^2 + 9}$

$(a-2)^2 + 4 = (a-4)^2 + 9$

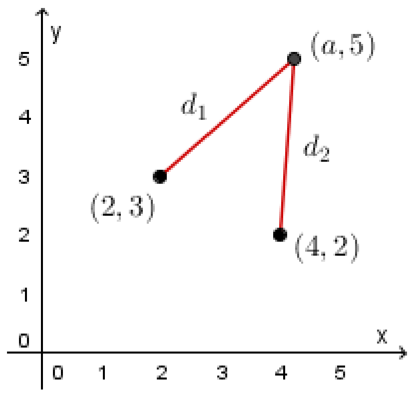
$a^2 - 4a + 4 + 4 = a^2 - 8a + 16 + 9$

$4a = 17$

$a = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} = 4.25$

Svar:

$a = \frac{17}{4} = 4.25$



34. På linjen $y = 2x$ finns en punkt P
vars avstånd till origo är 24 längdenheter.
Beräkna punkten P:s x-koordinat, $x > 0$ (0/1/1)

Antag att punkten P:s horisontella avstånd
från origo är x , då blir dess vertikala avstånd $2x$
eftersom punkten ligger på linjen $y = 2x$
Pythagoras sats ger

$24^2 = x^2 + (2x)^2$

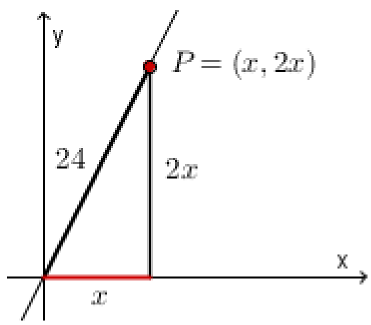
$24^2 = x^2 + 4x^2$

$24^2 = 5x^2$

$x^2 = \frac{24^2}{5}$

$x = \sqrt{\frac{24^2}{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}} \approx 10.73$

Svar: P:s x-koordinat är
$\frac{24}{\sqrt{5}} \approx 10.73\ l.e.$



35. Bestäm koordinaterna för de punkter
på linjen med ekvationen $y = x$
vars avstånd till origo är
exakt $\sqrt{32}$ längdenheter. (0/1/1)

Antag att punkten P:s horisontella avstånd
från origo är x , då blir dess vertikala avstånd x
eftersom punkten ligger på linjen $y = x$
Pythagoras sats ger

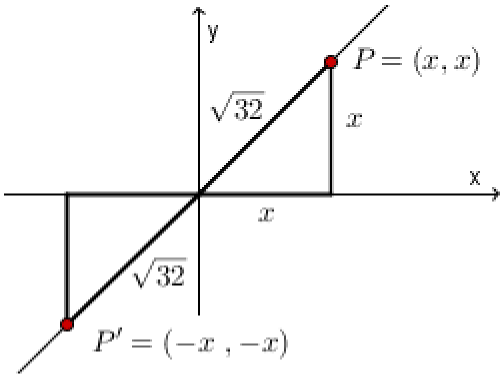
$\sqrt{32}^2 = x^2 + x^2$

$32 = 2x^2$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

Svar: $P = (4,4)$ och $P' = (-4,-4)$



36. Linjerna

$y = \frac{2x}{a}$

och $x = a$ avgränsar tillsammans
med x-axeln ett område.
Bestäm värdet på konstanten a
så att områdets area blir 3 areaenheter. (0/1/1)

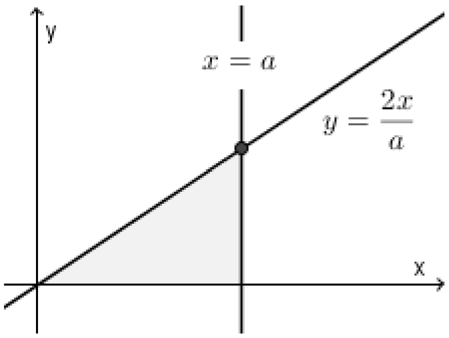
Skärningspunkten har x-koordinaten a
och y-koordinaten

$y(a) = \frac{2x}{a} = \frac{2 \cdot a}{a} = 2$

Triangelns bas $b = a$
Triangelns höjd, $h = 2$
Arean är 3 areaenheter ger ekvationen

$3 = \frac{a \cdot 2}{2}$

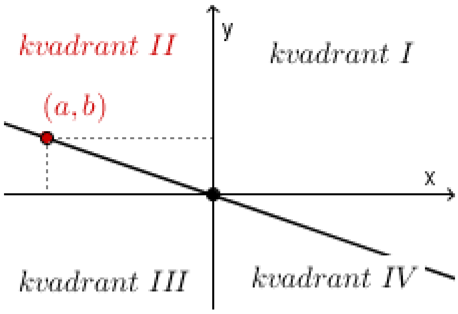
Svar: $a = 3$



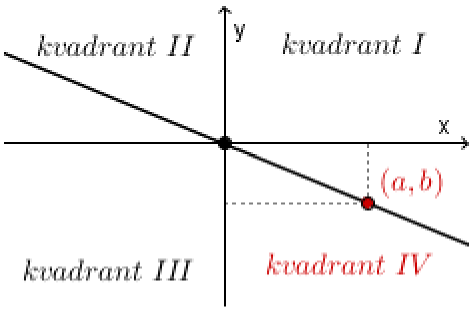
37. En rät linje går genom punkterna
med koordinaterna $(0,0)$ och (a,b)
där $a \neq 0$ och $b \neq 0$.
För vilka värden på a och b har linjen
genom punkterna ett negativt värde
på riktningskoefficienten? (0/1/1)

När punkten befinner sig i $kvadrant\ II$ eller
$kvadrant\ IV$ är värdet på
riktningskoefficienten negativt.
I $kvadrant\ II$ är

$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



I $kvadrant\ IV$ är
$\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



Svar: $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ eller $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$

38. Ange ekvationen för den linje där koordinaterna för alla punkter på linjen kan uttryckas $(x, -2x)$ (0/1/1)

Om $x = 0$ så är $y = -2 \cdot 0 = 0$

sålunda är $(0, 0)$ en punkt på linjen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2x - 0}{x - 0} = \frac{-2x}{x} = -2$$

Då linjen går genom origo är $m = 0$

Svar: $y = -2x$

39. Linjerna $x = -2$, $y = -1$, $x = 4$,
$y = 6 - x$ och $y = x + 4$
avgränsar ett område.
Beräkna områdets area. (0/1/1)

Området utgörs av en triangel och en rektangel

Börja med att bestämma hörnpunkterna A, B, C, E

Punkten A fås genom att lösa ekvationssystemet

$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 4 \end{cases}$

$y = y$ ger ekvationen

$-x + 6 = x + 4$ ger

$x = 1$ sättes in i någon av

linjernas ekvationer ovan, vilket ger

$y = 5$

$A = (1, 5)$

Punkten B fås genom att lösa ekvationssystemet

$\begin{cases} y = -x + 6 \\ x = 4 \end{cases}$

$y = -4 + 6 = 2$

$B = (4, 2)$

Punkten C fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$C = (4, -1)$

Punkten E fås genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$y = -2 + 4 = 2$

$B = (-2, 2)$

$$A_{triangel} = \frac{b_t \cdot h_t}{2}$$

där $b_t = 4 - (-2) = 6$ och

$h_t = 5 - 2 = 3$ vilket ger

$$A_{triangel} = \frac{b_t \cdot h_t}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

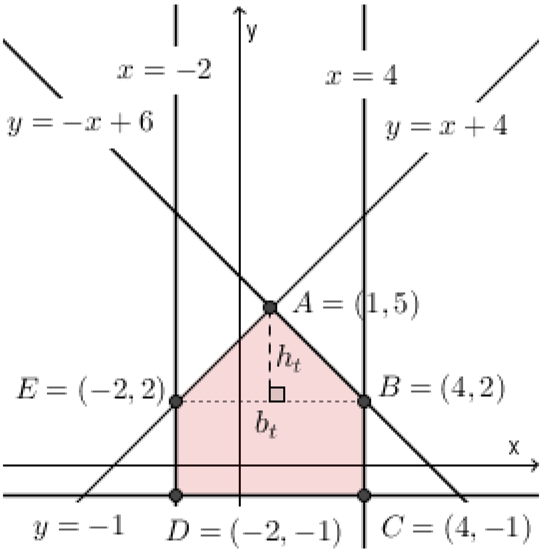
$A_{rektangel} = b_r \cdot h_r$

$b_r = b_t = 6$ och

$h_r = 2 - (-1) = 3$ vilket ger

$A_{rektangel} = 6 \cdot 3 = 18$

$A_{total} = 9 + 18 = 27\ a.e.$



40. Ange ekvationen för en rät linje som är vinkelrät mot linjen $ax + by + c = 0$ (0/1/1)

Lös ut y

$ax + by + c = 0$

$$y = \frac{-ax - c}{b}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$k = -\frac{a}{b}$$

Då $k \cdot k_{\perp} = -1$ fås

$k_{\perp} = \frac{b}{a}$

Den ''nya'' linjens ekvation blir

$y = \frac{b}{a}x + m$

Då det finns obegränsat många linjer som är möjliga,
kan vi till exempel välja den linjen som har $m = 0$,
vilket då ger ekvationen

$y = \frac{b}{a}x$

41. En elev simmar i en älv, *mot* strömmen,
sträckan 100 m på tiden 2 minuter och 5 sekunder
och *med* strömmen samma sträcka på 40 sekunder.
Beräkna hur fort eleven kan simma
utan hjälp av strömmen. (0/1/1)

$v_{mot} = \frac{100\ m}{2\ minuter\ och\ 5\ sekunder} =$

$\frac{100\ m}{125\ s} = 0.8\ m/s$

$v_{med} = \frac{100\ m}{40\ sekunder} = \frac{100\ m}{40\ s} = 2.5\ m/s$

$v_x =$ elevens hastighet utan strömmen

$\begin{cases} v_x + v_{ström} = 2.5 \\ v_x - v_{ström} = 0.8 \end{cases}$

Addera ekvationerna

$2v_x = 3.3$

$v_x = 1.65\ m/s$

$t_{utan\ ström} = \frac{s}{v_x} = \frac{100}{1.65} \approx 61\ s$

42. Summan av två tal är två. Summan av det
dubbla värdet av det en talet och halva
värdet av det andra talet är en fjärdedel.
Vilka är talen? (0/1/1)

Antag att talen är x och y då fås ekvationerna

$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

Substitutionsmetoden:

Lös ut y ur den översta ekvationen

$y = 2 - x$ sättes in i den andra ekvaionen

$2x + \frac{2 - x}{2} = \frac{1}{4}$

Multiplicera båda led med 4

$8x + 2(2 - x) = 1$

$8x + 4 - 2x = 1$

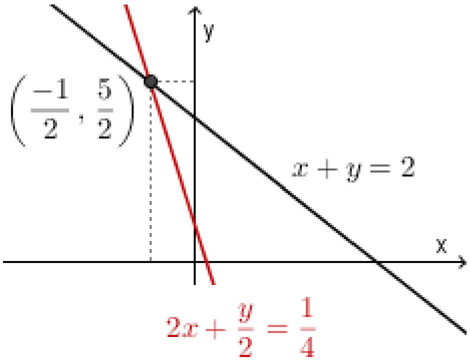
$6x = -3$

$x = -\frac{1}{2}$

$y = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Svar: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$

Grafisk lösning:



Avläs skärningspunkt

Svar: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$

43. Bestäm värdet av m så att linjen
$y = x + m$ tangerar kurvan
$y = \dfrac{x^2}{3}$
i en enda punkt. (0/0/2)

Ekvationsystemet

$$\begin{cases} y = x + m \\ y = \dfrac{x^2}{3} \end{cases}$$

ska ha endast en lösning

$y = y$ ger

$$x + m = \frac{x^2}{3}$$

$$3x + 3m = x^2$$

$$x^2 - 3x - 3m = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3m} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 3m}$$

Om

$$\sqrt{\frac{9}{4} + 3m} = 0$$

så blir ekvationen ovan

$$x = \frac{3}{2} \pm 0$$

och då blir $x_1 = x_2$ en så kallad dubbelrot
och linjen kommer att tangera kurvan

$$\sqrt{\frac{9}{4} + 3m} = 0$$

$$\frac{9}{4} + 3m = 0$$

$$3m = -\frac{9}{4}$$

$$m = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

Svar:

$$m = -\frac{3}{4}$$