Test 6.1

1. a) $\mathrm{Re}(4-\mathrm{i}) = 4,\quad \mathrm{Im}(4-\mathrm{i}) = -1$

   b) $\mathrm{Re}(-9\mathrm{i}) = 0,\quad \mathrm{Im}(-9\mathrm{i}) = -9$

   c) $\mathrm{Re}(-1+\mathrm{i}) = -1,\quad \mathrm{Im}(-1+\mathrm{i}) = 1$

   d) $\mathrm{Re}\left(\frac{2-7\mathrm{i}}{9}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{9} - \frac{7\mathrm{i}}{9}\right) = \frac{2}{9},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{2-7\mathrm{i}}{9}\right) = -\frac{7}{9}$

   Svar: a) $\mathrm{Re}(4-\mathrm{i}) = 4,\quad \mathrm{Im}(4-\mathrm{i}) = -1$

   b) $\mathrm{Re}(-9\mathrm{i}) = 0,\quad \mathrm{Im}(-9\mathrm{i}) = -9$

   c) $\mathrm{Re}(-1+\mathrm{i}) = -1,\quad \mathrm{Im}(-1+\mathrm{i}) = 1$

   d) $\mathrm{Re}\left(\frac{2-7\mathrm{i}}{9}\right) = \frac{2}{9},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{2-7\mathrm{i}}{9}\right) = -\frac{7}{9}$

2. a) $z = 2+7\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 2-7\mathrm{i}$

   b) $z = 0{,}25\ (+0\cdot\mathrm{i}) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 0{,}25\ (-0\cdot\mathrm{i})$

   c) $z = -3{,}3\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 3{,}3\mathrm{i}$

   d) $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 1-\mathrm{i}\sqrt{2}$

   Svar: a) $\bar{z} = 2-7\mathrm{i}$ b) $\bar{z} = 0{,}25$ c) $\bar{z} = 3{,}3\mathrm{i}$ d) $\bar{z} = 1-\mathrm{i}\sqrt{2}$

3. a) $z = 5i$

$|z| = |5i| = 5$

Talet 5i ligger utefter den positiva imaginära axeln.

arg $z = 90^o$.

$z = 5(\cos 90^o + i\sin 90^o)$

b) $z = -6 - 8i$

$|z| = |-6-8i| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

Sätt $\arg z = v$

z ligger i 3:e kvadranten.

$\tan v = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad v \approx 53{,}1^o + 180^o = 233{,}1^o$

$z = 10(\cos 233^o + i\sin 233^o)$

c) $z = 7 - 7i$

$|z| = |7-7i| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

Sätt $\arg z = v$

z ligger i 4:e kvadranten.

$\tan v = \frac{-7}{7} = -1 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

$z = 7\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

d) $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}$

$|z| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

Sätt $\arg z = v$

z ligger i 2:a kvadranten.

$\tan v = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{\sqrt{3}}{8}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$

$z = \frac{1}{4}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

Svar: a) $z = 5(\cos 90^o + i\sin 90^o)$

b) $z = 10(\cos 233^o + i\sin 233^o)$

c) $z = 7\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

d) $z = \frac{1}{4}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

4. Se lösning i lärobokens facit.

5. a) $|z| = |3-i| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

b) $|z| = |-2+5i| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

c) $z = 2(\cos 45^o + i\sin 45^o)$

z är skrivet i polär form. Vi ser då omedelbart att $|z| = 2$.

d) $|z| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^{\,2} + {-1}^{2}} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Svar: a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{29}$ c) 2 d) 2

6. a) $z = 2(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2((-1) + i\cdot 0) = -2$

b) $z = 3(\cos 120^o + i\sin 120^o) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2}(-1 + i\cdot\sqrt{3})$

c) $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

d) $z = 0{,}5(\cos(-135^o) + i\sin(-135^o)) =$

$= 0{,}5(\cos 135^o - i\sin 135^o) = 0{,}5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}(-1-i)$

Svar: a) -2 b) $\frac{3}{2}(-1+i\cdot\sqrt{3})$ c) $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}(-1-i)$

7. Se lösning i lärobokens facit.

8. a) Sätt $z = x + yi$; $\bar{z} = x - yi$;

$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{x + yi - (x - yi)}{2i} = \frac{x + yi - x + yi}{2i} =$

$= \frac{2yi}{2i} = y$

$\frac{z - \bar{z}}{2i} < -1 \quad \Rightarrow \quad y < -1$

Således: $y = \text{Im } z < -1$

Området i det komplexa talplanet: se lärobokens facit.

b) $|z - 1| < 3$ är en cirkel med medelpunkt i 1 och med radien 3. Eftersom det är en sträng olikhet är inte randen av cirkeln inkluderad.

$-1 < \text{Im } z < 1$ är ett horisontellt band mellan linjerna $\text{Im } z = 1$ och $\text{Im } z = -1$. Randen är inte inkluderad.

Områdena i det komplexa talplanet: se lärobokens facit.

Test 6.2

1. $z = 1+3i,\ w = -2+i$

a) $z + w = 1+3i+(-2+i) = 1+3i-2+i = -1+4i$

b) $w - z = -2+i-(1+3i) = -2+i-1-3i = -3-2i$

c) $2z - 3\overline{w} = 2(1+3i)-3(-2-i) = 2+6i+6+3i = 8+9i$

d) $zw = (1+3i)(-2+i) = -2+i-6i+3i^2 =$

$= -2+i-6i-3 = -5-5i$

e) $z^2 = (1+3i)^2 = 1^2+6i+(3i)^2 = 1+6i-9 = -8+6i$

f) $\dfrac{2\overline{z}}{w} = \dfrac{2(1-3i)}{-2+i} = \dfrac{2(1-3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} =$

$= \dfrac{2(-2-i+6i+3i^2)}{(-2)^2-i^2} = \dfrac{2(-2-i+6i-3)}{4+1} = \dfrac{2(-5+5i)}{5} =$

$= \dfrac{-10+10i}{5} = -2+2i$

g) $\overline{z}z = (1-3i)(1+3i) = 1^2-(3i)^2 = 1+9 = 10$

h) $z+\overline{z} = 1+3i+(1-3i) = 1+3i+1-3i = 2$

i) $\dfrac{z-i}{w+i} = \dfrac{1+3i-i}{-2+i+i} = \dfrac{1+2i}{-2+2i} = \dfrac{(1+2i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} =$

$= \dfrac{-2-2i-4i-4i^2}{(-2)^2-(2i)^2} = \dfrac{-2-2i-4i+4}{4+4} = \dfrac{2-6i}{8} = \dfrac{1-3i}{4}$

Svar: a) $-1+4i$ b) $-3-2i$ c) $8+9i$ d) $-5-5i$

e) $-8+6i$ f) $-2+2i$ g) 10 h) 2 i) $\dfrac{1-3i}{4}$

2. a) $i^2 = -1,\ i^4 = 1$

$i^{10}+i^8+i^6+i^4+i^2+i^0 =$

$= i^4\cdot i^4\cdot i^2+i^4\cdot i^4+i^4\cdot i^2+i^4+i^2+i^0 =$

$= 1\cdot 1\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot(-1)+1+(-1)+1 = 0$

b) $\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{i-i^2}{1^2-i^2} = \dfrac{i+1}{1+1} = \dfrac{1+i}{2}$

c) $\dfrac{(1+i)^3}{i} = \dfrac{(1+i)^2(1+i)}{i} = \dfrac{(1^2+2i+i^2)(1+i)}{i} =$

$= \dfrac{(1^2+2i-1)(1+i)}{i} = \dfrac{2i(1+i)}{i} = 2(1+i) = 2+2i$

d) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2} = \dfrac{1^2+2i+i^2}{1^2-i^2} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$

Svar: a) 0 b) $\dfrac{1+i}{2}$ c) $2+2i$ d) i

3. a) $iz = 5-3i$

$z = \dfrac{5-3i}{i} = \dfrac{-i\cdot(5-3i)}{-i\cdot i} = \dfrac{-5i+3i^2}{1} = \dfrac{-5i-3}{1} = -3-5i$

b) Sätt $z = x+yi;\ \overline{z} = x-yi$

$z+2\overline{z} = 1+3i$

$x+yi+2(x-yi) = x+yi+2x-2yi = 3x-yi = 1+3i$

Realdelar och imaginärdelar i VL och HL sätts lika.

$\begin{cases} 3x = 1 \\ -y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases}$

$z = \dfrac{1}{3} - 3i$

c) $\dfrac{1-2i}{z} = -2+3i$

$\dfrac{1-2i}{-2+3i} = z$

$z = \dfrac{1-2i}{-2+3i} = \dfrac{(1-2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \dfrac{-2-3i+4i+6i^2}{(-2)^2-(3i)^2} =$

$= \dfrac{-2-3i+4i-6}{4+9} = \dfrac{-8+i}{13}$

d) Sätt $z = x+yi;\ \overline{z} = x-yi$

$(1+i)^2 z = \overline{z}-1-i$

$(1+2i+i^2)(x+yi) = x-yi-1-i$

$(1+2i-1)(x+yi) = x-yi-1-i$

$2i(x+yi) = x-yi-1-i$

$2xi+2yi^2 = x-yi-1-i$

$2xi-2y = x-yi-1-i$

$-x-2y+(2x+y)i = -1-i$

Realdelar och imaginärdelar i VL och HL sätts lika.

$\begin{cases} -x-2y = -1 \\ 2x+y = -1 \end{cases}$

Vi multiplicerar den övre ekvationen med 2 och sedan adderar vi ekvationerna ledvis.

$\begin{cases} -2x-4y = -2 \\ 2x+y = -1 \end{cases}$

$-3y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

Detta värde på y insättes i den övre ekvationen:

$-2x-4\cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad -2x = -2+4 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Således: $z = -1+i$

Svar: a) $z = -3-5i$ b) $z = \dfrac{1}{3}-3i$ c) $z = \dfrac{-8+i}{13}$

d) $z = -1+i$

4. a) $|(2-3i)(-3+2i)| = |2-3i| \cdot |-3+2i| =$

$\sqrt{2^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{4+9} \cdot \sqrt{9+4} = 13$

b) $|(1+4i)^3| = |1+4i|^3 = \sqrt{1^2+4^2}^{\,3} = \sqrt{17}^{\,3} = 17\sqrt{17}$

c) $\left|\dfrac{1+i\sqrt{5}}{\sqrt{5}+i}\right| = \dfrac{|1+i\sqrt{5}|}{|\sqrt{5}+i|} = \dfrac{\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{1+5}}{\sqrt{5+1}} = 1$

d) $\left|\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{3})}{i-1}\right| = \left|\dfrac{(\sqrt{2})^2-(i\sqrt{3})^2}{i-1}\right| =$

$= \left|\dfrac{2+3}{i-1}\right| = \dfrac{5}{|i-1|} = \dfrac{5}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Svar: a) 13 b) $17\sqrt{17}$ c) 1 d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

d) $|z_1 \cdot \bar{z}_1| = |z_1| \cdot |\bar{z}_1| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$

e) $z_1^3 = (\sqrt{13}(\cos 146{,}3^\circ + i\sin 146{,}3^\circ))^3 =$

$= 13\sqrt{13}(\cos 438{,}9^\circ + i\sin 438{,}9^\circ)$

Argumenten är periodiska med perioden 360°.

Vi väljer därför argumentet $438{,}9^\circ - 360^\circ = 78{,}9^\circ$

$z_1^3 = 13\sqrt{13}(\cos 78{,}9^\circ + i\sin 78{,}9^\circ)$

f) $|z_1^2 z_2^4| = |z_1|^2 \cdot |z_2|^4 = (\sqrt{13})^2(\sqrt{26})^4 =$

$= 13 \cdot 26^2 = 8788$

$\arg(z_1^2 z_2^4) = \arg(z_1^2) + \arg(z_2^4) = 2 \cdot \arg z_1 + 4 \cdot \arg z_2 =$

$= 2 \cdot 146{,}3^\circ + 4 \cdot 281{,}3^\circ = 1417{,}8^\circ$

Argumenten är periodiska med perioden 360°.

Vi väljer därför argumentet $1417{,}8^\circ - 3 \cdot 360^\circ = 337{,}8^\circ$

$z_1^2 z_2^4 = 8788(\cos 337{,}8^\circ + i\sin 337{,}8^\circ)$

Svar: a) $z_1 \cdot z_2 = 13\sqrt{2}(\cos 67{,}6^\circ + i\sin 67{,}6^\circ)$

b) $\dfrac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$

c) $z_1 \cdot \bar{z}_2 = 13\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

d) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = 13$

e) $z_1^3 = 13\sqrt{13}(\cos 78{,}9^\circ + i\sin 78{,}9^\circ)$

f) $z_1^2 z_2^4 = 8788(\cos 337{,}8^\circ + i\sin 337{,}8^\circ)$

5. $z_1 = -3+2i$; $z_2 = 1-5i$

$|z_1| = |-3+2i| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Sätt $\arg z_1 = v$ $\quad z_1$ ligger i 2:a kvadranten.

$\tan v = \dfrac{2}{-3} \quad \Rightarrow \quad v \approx -33{,}7^\circ + 180^\circ = 146{,}3^\circ$

$z_1 = \sqrt{13}(\cos 146{,}3^\circ + i\sin 146{,}3^\circ)$

$|z_2| = |1-5i| = \sqrt{1^2+(-5)^2} = \sqrt{1+26} = \sqrt{26}$

Sätt $\arg z_2 = w$ $\quad z_2$ ligger i 4:e kvadranten.

$\tan w = \dfrac{-5}{1} \quad \Rightarrow \quad w \approx -78{,}7^\circ + 360^\circ = 281{,}3^\circ$

$z_2 = \sqrt{26}(\cos 281{,}3^\circ + i\sin 281{,}3^\circ)$

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} = 13\sqrt{2}$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \approx 146{,}3^\circ + 281{,}3^\circ = 427{,}6^\circ$

Argumenten är periodiska med perioden 360°.

Vi väljer därför argumentet till $427{,}6^\circ - 360^\circ = 67{,}6^\circ$

$z_1 \cdot z_2 = 13\sqrt{2}(\cos 67{,}6^\circ + i\sin 67{,}6^\circ)$

b) $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{2}$

$\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \arg z_2 - \arg z_1 \approx 281{,}3^\circ - 146{,}3^\circ = 135^\circ$

$\dfrac{z_2}{z_1} = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$

c) $|z_1 \cdot \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} = 13\sqrt{2}$

$\bar{z}_2 = 1+5i$ $\quad$ Sätt $\arg \bar{z}_2 = u$

$\bar{z}_2$ ligger i 1:a kvadranten.

$\tan u = \dfrac{5}{1} \quad \Rightarrow \quad u \approx 78{,}7^\circ$

$\arg(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \arg z_1 + \arg \bar{z}_2 \approx 146{,}3^\circ + 78{,}7^\circ = 225^\circ$

$z_1 \cdot \bar{z}_2 = 13\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

6. Sätt $z = 2-2i$

$|z| = |2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

Sätt $\arg z = v$ $\quad z$ ligger i 4:e kvadranten.

$\tan v = \dfrac{-2}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad v = -45^\circ$

$2-2i = 2\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))$

Vi får då att

$(2-2i)^8 = \left[2\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))\right]^8 =$

$= (2\sqrt{2})^8(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))^8 =$

$= 2^{12}(\cos(-45^\circ) \cdot 8 + i\sin(-45^\circ) \cdot 8)^8 =$

$= 2^{12}(\cos(-360^\circ) + i\sin(-360^\circ))^8 =$

$= 2^{12}(1+0) = 2^{12} = 4096$

Svar. 4096

7. $w=\dfrac{z}{\mathrm{i}}+\mathrm{i}\cdot\bar{z}=\dfrac{-\mathrm{i}\cdot z}{-\mathrm{i}^2}+\mathrm{i}\cdot\bar{z}=\dfrac{-\mathrm{i}\cdot z}{1}+\mathrm{i}\cdot\bar{z}=\mathrm{i}(\bar{z}-z)$

Sätt $z=x+y\mathrm{i}$, $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$

$w=\mathrm{i}(\bar{z}-z)=\mathrm{i}(x-y\mathrm{i}-(x+y\mathrm{i}))=\mathrm{i}(-2y\mathrm{i})=-2y\mathrm{i}^2=2y$

Om $y>0$ så är arg w = arg $2y=0^{\mathrm{o}}$

Om $y<0$ så är arg w = arg $2y=180^{\mathrm{o}}$

Svar: 0^{o} eller 180^{o}

8. $\dfrac{e^{\mathrm{i}2\pi/3}}{e^{\mathrm{i}7\pi/6}}=e^{\mathrm{i}2\pi/3-\mathrm{i}7\pi/6}=e^{\mathrm{i}(\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{6})}=e^{\mathrm{i}(\frac{4\pi}{6}-\frac{7\pi}{6})}=e^{\mathrm{i}(-\frac{3\pi}{6})}=$

$=e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0-\mathrm{i}=-\mathrm{i}$

Svar: –i

Test 6.3

1. a) $z^2+6z+10=0$

$z=-3\pm\sqrt{(-3)^2-10}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm\mathrm{i}$

b) $z^2+12z+45=0$

$z=-6\pm\sqrt{(-6)^2-45}=-6\pm\sqrt{36-45}=$

$=-6\pm\sqrt{-9}=-6\pm3\mathrm{i}$

c) $2z^2-10z+13=0$

$z^2-5z+\dfrac{13}{2}=0$

$z=\dfrac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{13}{2}}=\dfrac{5}{2}\pm\sqrt{\dfrac{25}{4}-\dfrac{26}{4}}=$

$=\dfrac{5}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{5}{2}\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}=\dfrac{5\pm\mathrm{i}}{2}$

d) $5z^2-8z+5=0$

$z^2-\dfrac{8z}{5}+1=0$

$z=\dfrac{4}{5}\pm\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-1}=\dfrac{4}{5}\pm\sqrt{\dfrac{16}{25}-\dfrac{25}{25}}=$

$=\dfrac{4}{5}\pm\sqrt{-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}\pm\dfrac{3\mathrm{i}}{5}=\dfrac{4\pm3\mathrm{i}}{5}$

Svar: a) $z_{1,2}=-3\pm\mathrm{i}$ b) $z_{1,2}=-6\pm3\mathrm{i}$

c) $z_{1,2}=\dfrac{5\pm\mathrm{i}}{2}$ d) $z_{1,2}=\dfrac{4\pm3\mathrm{i}}{5}$

2. Om ett polynom har reella koefficienter så är de icke-reella nollställena parvis konjugerade.

a) 1 + 2i är ett nollställe. Då är även 1 – 2i ett nollställe.

Låt andragradspolynomet vara z^2+pz+q

Sambanden mellan nollställen och koefficienter ger

$1+2\mathrm{i}+(1-2\mathrm{i})=2=-p \quad\Rightarrow\quad p=-2$

$(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=1^2-(2\mathrm{i})^2=1-4\mathrm{i}^2=1+4=5=q$

Andragradspolynomet är z^2-2z+5 ..

En andragradsekvation är $z^2-2z+5=0$

b) Låt andragradspolynomet vara z^2+pz+q

2 – i är ett nollställe till polynomet. Då är även 2 + i ett nollställe.

Sambanden mellan nollställen och koefficienter ger

$2+\mathrm{i}+(2-\mathrm{i})=4=-p \quad\Rightarrow\quad p=-4$

$(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=2^2-\mathrm{i}^2=4+1=5=q$

Andragradspolynomet är z^2-4z+5 ..

3 skall också vara ett nollställe vilket innebär att polynomet måste innehålla faktorn $(z-3)$.

Det polynom som vi söker är då av tredje graden och kan skrivas $(z-3)(z^2-4z+5)$

$(z-3)(z^2-4z+5)=z^3-4z^2+5z-3z^2+12z-15=$

$=z^3-7z^2+17z-15$

En tredjegradsekvation är $z^3-7z^2+17z-15=0$

c) Om en tredjegradsekvation skall ha en dubbelrot $z=2$ och en rot $z=-1$, måste faktorerna i polynomet vara

$(z+1)(z-2)^2=(z+1)(z^2-4z+4)=$

$=z^3-4z^2+4z+z^2-4z+4=z^3-3z^2+4$

Den sökta tredjegradsekvationen är $z^3-3z^2+4=0$

d) 3i är en rot. Då är även –3i en rot och polynomet måste innehålla faktorerna

$(z+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})=z^2-(3\mathrm{i})^2=z^2-9\mathrm{i}^2=z^2+9$

Polynomet skall också innehålla en faktor z^2+pz+q som har nollstället 1 – i och därmed också nollstället 1 + i.

Sambandet mellan nollställen och koefficienter ger att

$1+\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})=2=-p \quad\Rightarrow\quad p=-2$

$(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=1^2-\mathrm{i}^2=1+1=2=q$

Andragradspolynomet är z^2-2z+2

Det fjärdegradspolynom som vi söker är således

$(z^2+9)(z^2-2z+2)=z^4-2z^3+2z^2+9z^2-18z+18=$

$=z^4-2z^3+11z^2-18z+18$

Den sökta tredjegradsekvationen är

$z^4-2z^3+11z^2-18z+18=0$

Svar: a) $z^2-2z+5=0$ b) $z^3-7z^2+17z-15=0$

c) $z^3-3z^2+4=0$ d) $z^4-2z^3+11z^2-18z+18=0$

3. a) $(z+1)(z^2-5z+7)=0$

$(z+1)=0 \quad \Rightarrow \quad z=-1$

$z^2-5z+7=0$

$$z=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-7}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{28}{4}}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{5\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

b) $z^3-z^2+8z+10=0$

Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och eftersom $z = 1 + 3\mathrm{i}$ är ett nollställe till vänsterledet är också det konjugerade talet $z = 1 - 3\mathrm{i}$ ett nollställe. Vänsterledet är således delbart med polynomet

$(z-(1+3\mathrm{i}))(z-(1-3\mathrm{i}))=((z-1)-3\mathrm{i})((z-1)+3\mathrm{i})=$

$=(z-1)^2-(3\mathrm{i})^2=z^2-2z+1-9\mathrm{i}^2=$

$=z^2-2z+1+9=z^2-2z+10$

Vi utför en polynomdivision.

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{c}{z+1} & \\
\hline
z^3-z^2+8z+10 & z^2-2z+10 \\
-(z^3-2z^2+10z) & \\
\hline
\quad z^2-2z+10 & \\
-(z^2-2z+10) & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

Kvoten är $z+1$. $\quad z+1=0 \quad \Rightarrow \quad z=-1$

De övriga rötterna är enligt ovan $z=1\pm3\mathrm{i}$

c) $(z^2+3z+6)(z^2-4z+5)=0$

Någon av faktorerna måste vara noll.

Sätt $z^2-4z+5=0$

$z=2\pm\sqrt{2^2-5}=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm\sqrt{-1}=2\pm\mathrm{i}$

Sätt $z^2+3z+6=0$

$$z=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-6}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{24}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}}=$$

$$=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{-15}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$$

$z_{1,2}=2\pm\mathrm{i},\ z_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$

d) $(z^2+4)^2(z-3)=0$

Någon av faktorerna måste vara noll.

Sätt $(z^2+4)^2=0 \quad \Rightarrow \quad z^2+4=0$ (dubbelrot) $\quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad z^2=-4 \quad \Rightarrow \quad z=\pm\sqrt{-4} \quad \Rightarrow \quad z=\pm2\mathrm{i}$

Rötterna är således $z_{1,2}=2\mathrm{i},\ z_{3,4}=-2\mathrm{i}$

Sätt $(z-3)=0 \quad \Rightarrow \quad z=3$

Svar: a) $z_1=-1,\ z_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

b) $z_1=-1,\ z_{2,3}=1\pm3\mathrm{i}$

c) $z_{1,2}=2\pm\mathrm{i},\ z_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$

d) $z_{1,2}=2\mathrm{i},\ z_{3,4}=-2\mathrm{i},\ z_5=3'$

4. $z^2+7z+q=0$

$$z=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2-q}=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-q}$$

Ekvationen har icke-reella rötter om $q>\dfrac{49}{4}$

Svar: $q>\dfrac{49}{4}$

5. a) $p(z)=z^3+2z^2+5z+10=0$

Vi bryter ut z^2 ur de två första termerna och bryter ut 5 ur de två sista termerna. Vi får: $z^2(z+2)+5(z+2)=0$

Vi kan nu se polynomet som bestående av två termer som båda innehåller den gemensamma faktorn $(z+2)$.

Vi bryter ut denna. $(z+2)(z^2+5)=0$

Vi har då kunnat faktorisera vänsterledet.

Att $(z+2)$ är en faktor visar att $z = -2$ är ett nollställe till polynomet $p(z)$.

Man kan naturligtvis också sätta in $z = -2$ i polynomet och se att dess värde då är noll.

b) Sätt $(z^2+5)=0 \quad \Rightarrow \quad z^2=-5 \quad \Rightarrow \quad z=\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$

Ekvationens rötter är således $z_1=-2,\ z_{2,3}=\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$

Svar: a) - b) $z_1=-2,\ z_{2,3}=\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$

6. $2z^3+z^2-3=0$

Vi ser att $z = 1$ är en rot till ekvationen: $2\cdot1^3+1^2-3=0$

Då innehåller polynomet i vänsterledet faktorn $(z - 1)$ och vi använder polynomdivision för att hitta de andara faktorerna.

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{c}{2z^2+3z+3} & \\
\hline
2z^3+z^2\qquad -3 & z-1 \\
\cline{2-2}
-(2z^3-2z^2) & \\
\hline
\quad 3z^2\qquad -3 & \\
\quad -(3z^2-3z) & \\
\hline
\qquad 3z-3 & \\
\qquad -(3z-3) & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Kvoten är $2z^2+3z+3=0$.

Ekvationen kan skrivas $(z-1)(2z^2+3z+3)=0$

Sätt $2z^2+3z+3=0 \quad \Rightarrow \quad z^2+\dfrac{3z}{2}+\dfrac{3}{2}=0$

$$z=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{24}{16}}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{-\frac{15}{16}}=$$

$$=-\frac{3}{4}\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{15}}{4}=\frac{-3\pm\mathrm{i}\sqrt{15}}{4}$$

Svar: $z_1=1$, $z_{2,3}=\dfrac{-3\pm\mathrm{i}\sqrt{15}}{4}$

7. a) $z^2=\cos\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}$

$$z^2=\cos\left(\frac{\pi}{12}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}+k\cdot 2\pi\right)$$

Sätt $z=|z|(\cos u+\mathrm{i}\sin u)$

$$z^2=|z|^2\,(\cos 2u+\mathrm{i}\sin 2u)$$

$$\begin{cases}|z|^2=1\\ 2u=\dfrac{\pi}{12}+k\cdot 2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|z|=1\\ u=\dfrac{\pi}{24}+k\cdot\pi,\ k=0,1\end{cases}$$

$k=0$ ger roten

$$z_0=1(\cos\frac{\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{24})=\cos\frac{\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{24}$$

$k=1$ ger roten

$$z_1=1(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{24}+\pi\right))=\cos\frac{25\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{24}$$

b) $z^3=27$

$$27=27(\cos\ k\cdot 2\pi\ +\mathrm{i}\sin\ k\cdot 2\pi$$

$$z^3=27(\cos\ k\cdot 2\pi\ +\mathrm{i}\sin\ k\cdot 2\pi$$

Sätt $z=|z|(\cos u+\mathrm{i}\sin u)$

$$z^3=|z|^3\,(\cos 3u+\mathrm{i}\sin 3u)$$

$$\begin{cases}|z|^3=27\\ 3u=k\cdot 2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|z|=27^{\frac{1}{3}}=3\\ u=k\cdot\dfrac{2\pi}{3},\ k=0,1,2\end{cases}$$

$k=0$ ger roten $z_0=3\ \cos 0+\mathrm{i}\sin 0\ =3$

$k=1$ ger roten

$$z_1=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{3(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{2}$$

$k=2$ ger roten

$$z_2=3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{3(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{2}$$

c) $z^4=-4$

$$-4=4(\cos\ \pi+k\cdot 2\pi\ +\mathrm{i}\sin\ \pi+k\cdot 2\pi$$

$$z^4=4(\cos\ \pi+k\cdot 2\pi\ +\mathrm{i}\sin\ \pi+k\cdot 2\pi$$

Sätt $z=|z|(\cos u+\mathrm{i}\sin u)$

$$z^4=|z|^4\,(\cos 4u+\mathrm{i}\sin 4u)$$

$$\begin{cases}|z|^4=4\\ 4u=\pi+k\cdot 2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|z|=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}\\ u=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\dfrac{\pi}{2},\ k=0,1,2,3\end{cases}$$

$k=0$ ger roten

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)=1+\mathrm{i}$$

$k=1$ ger roten

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)=-1+\mathrm{i}$$

$k=2$ ger roten

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)=-1-\mathrm{i}$$

$k=3$ ger roten

$$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)=1-\mathrm{i}$$

d) $z^3=-\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

Sätt $z=|z|(\cos u+\mathrm{i}\sin u)$

$$z^3=|z|^3\,(\cos 3u+\mathrm{i}\sin 3u)$$

$$\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

Sätt $\arg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)=v\ \Rightarrow\ \tan v=\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$v=\dfrac{\pi}{6}+n\cdot\pi\qquad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ ligger i 3:e kvadranten..

$$\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}=1\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)\right)$$

$$|z|^3\,(\cos 3u+\mathrm{i}\sin 3u)=$$

$$=1\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)\right)$$

$$\begin{cases}|z|^3=1\\ 3u=\dfrac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|z|=1\\ u=\dfrac{7\pi}{18}+k\cdot\dfrac{2\pi}{3},\ k=0,1,2\end{cases}$$

$k=0,1,2$ ger rötterna $z_0=\cos\dfrac{7\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{18}$

$$z_1=\cos\left(\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{19\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{18}$$

$$z_2=\cos\left(\frac{7\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{31\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\frac{31\pi}{18}$$

Svar: a) $z_0=\cos\dfrac{\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{24},\ z_1=\cos\dfrac{25\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\dfrac{25\pi}{24}$

b) $z_0=3,\ z_1=\dfrac{3(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{2},\ z_2=\dfrac{3(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{2}$

c) $z_0=1+\mathrm{i},\ z_1=-1+\mathrm{i},\ z_2=-1-\mathrm{i},\ z_3=1-\mathrm{i}$

d) $z_0=\cos\dfrac{7\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{18},\ z_1=\cos\dfrac{19\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\dfrac{19\pi}{18}$

$z_2=\cos\dfrac{31\pi}{18}+\mathrm{i}\sin\dfrac{31\pi}{18}$

8. $z = \mathrm{i}$ är ett nollställe.. Eftersom polynomet har reella koefficienter vet vi att även konjugatet till det givna nollstället är en rot, dvs. $z = -\mathrm{i}$.
Dessa båda tal är nollställen till ett polynom av typ

$z^2 + pz + q$

Vi utnyttjar kända samband mellan deras summa och produkt och koefficienterna p och q.

$\mathrm{i} + (-\mathrm{i}) = 0 = -p \quad \Rightarrow \quad p = 0$

$-\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = 1 = q$

Andragradspolynomet är $z^2 + 1$.
Polynomet $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$ innehåller då faktorn $z^2 + 1$. För att få ut den återstående faktorn genomför vi en polynomdivision.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\multicolumn{5}{c}{z^2 - 2z + 1} & \\
\hline
z^4 & -2z^3 & +2z^2 & -2z & +1 & z^2 + 1 \\
\cline{6-6}
-(z^4 & & +z^2) & & & \\
\cline{1-3}
& -2z^3 & +z^2 & -2z & & \\
& -(2z^3 & & -2z) & & \\
\cline{2-4}
& & z^2 & & +1 & \\
& & -(z^2 & & +1) & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Kvoten är $z^2 - 2z + 1$.
Med kvadreringsregelns hjälp er si att

$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$

Således: $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = (z^2 + 1)(z-1)^2$

Svar: $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = (z^2 + 1)(z-1)^2$