6122. Rötterna markerade i ett komplext talplan: se lärobokens facit.

a) $z^2 = -4$

Sätt $z = |z|(\cos u + i \sin u)$

$$z^2 = |z|^2 (\cos 2u + i \sin 2u)$$

$$-4 = 4(\cos(\pi + k \cdot 2\pi) + i \sin(\pi + k \cdot 2\pi))$$

$$|z|^2 (\cos 2u + i \sin 2u) =$$

$$= 4(\cos(\pi + k \cdot 2\pi) + i \sin(\pi + k \cdot 2\pi))$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 4 \\ 2u = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ u = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k = 0,1 \end{cases}$$

$k = 0$ ger roten $z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2(0 + i) = 2i$

$k = 1$ ger roten $z_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i$

b) $z^3 = 8$

Sätt $z = |z|(\cos u + \mathrm{i}\sin u)$

$z^3 = |z|^3(\cos 3u + \mathrm{i}\sin 3u)$

$8 = 8(\cos(0 + k\cdot 2\pi) + \mathrm{i}\sin(0 + k\cdot 2\pi))$

$$\begin{cases}|z|^3 = 8\\ 3u = k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 8^{\frac{1}{3}} = 2\\ u = k\cdot\dfrac{2\pi}{3},\ k = 0,1,2\end{cases}$$

$k = 0$ ger roten $z_0 = 2(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 2(1+0) = 2$

$k = 1$ ger roten

$$z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$$

$k = 2$ ger roten

$$z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

c) $z^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad z^4 - 1 = 0$

Vi faktoriserar VL med konjugatregeln.

$(z^2+1)(z^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (z^2 - \mathrm{i}^2)(z^2-1) = 0$

$(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+1)(z-1) = 0$

Vi har nu skrivit ekvationen som en nollprodukt.
Rötterna är $z_0 = -\mathrm{i}$, $z_1 = \mathrm{i}$,, $z_2 = -1$,, $z_3 = 1$,

d) $z^4 = -1$

Sätt $z = |z|(\cos u + \mathrm{i}\sin u)$

$z^4 = |z|^4(\cos 4u + \mathrm{i}\sin 4u)$

$-1 = 1(\cos(\pi + k\cdot 2\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi + k\cdot 2\pi))$

$|z|^4(\cos 4u + \mathrm{i}\sin 4u) =$

$= 1(\cos(\pi + k\cdot 2\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi + k\cdot 2\pi))$

$$\begin{cases}|z|^4 = 1\\ 4u = \pi + k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 1\\ u = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot\dfrac{\pi}{2},\ k = 0,1,2,3\end{cases}$$

$k = 0$ ger roten

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$$

$k = 1$ ger roten

$$z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})$$

$k = 2$ ger roten

$$z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i})$$

$k = 3$ ger roten

$$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$$

Svar: a) $z_{0,1} = \pm 2\mathrm{i}$ b) $z_0 = 2$, $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}$

c) $z_{0,1} = \pm\mathrm{i}$, $z_{2,3} = \pm 1$

d) $z_{0,2} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$, $z_{1,3} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})$

6123. Rötterna markerade i ett komplext talplan: se lärobokens facit.

a) $z^2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$$z^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi\right)$$

Sätt $z = |z|(\cos u + \mathrm{i}\sin u)$

$z^2 = |z|^2(\cos 2u + \mathrm{i}\sin 2u)$

$$\begin{cases}|z|^2 = 1\\ 2u = \dfrac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 1\\ u = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot\pi,\ k = 0,1\end{cases}$$

$k = 0$ ger roten

$$z_0 = 1(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$$

$k = 1$ ger roten

$$z_1 = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$$

b) $z^3 = 8\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$$z^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi\right)$$

Sätt $z = |z|(\cos u + \mathrm{i}\sin u)$

$z^3 = |z|^3(\cos 3u + \mathrm{i}\sin 3u)$

$$\begin{cases}|z|^3 = 8\\ 3u = \dfrac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 8^{\frac{1}{3}} = 2\\ u = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot\dfrac{2\pi}{3},\ k = 0,1,2\end{cases}$$

$k = 0$ ger roten $z_0 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$k = 1$ ger roten $z_1 = 2\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$$= 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{2}\right)$$

$k = 2$ ger roten

$$z_2 = 2\cos\left(\left(\frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

c) $z^4 = 2\ \ \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$

$z^4 = \cos\ \ \pi + k\cdot 2\pi\ \ + \mathrm{i}\sin\ \ \pi + k\cdot 2\pi$

Sätt $z = |z|(\cos u + \mathrm{i}\sin u)$

$z^4 = |z|^4(\cos 4u + \mathrm{i}\sin 4u)$

$$\begin{cases}|z|^4 = 2\\ 4u = \pi + k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 2^{\frac{1}{4}}\\ u = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot\dfrac{\pi}{2},\ k = 0,1,2,3\end{cases}$$

$k = 0$ ger roten $z_0 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

© Gennow, Gustafsson, Silborn och Gleerups Utbildning AB
Detta material ingår som en del i Exponent lärarmaterial
Materialet får skrivas ut, kopieras och användas under giltig licenstid

$k = 1$ ger roten $z_1 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$k = 2$ ger roten

$z_2 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$k = 3$ ger roten

$z_3 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Svar: a) $z_0 = \cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3},\ z_1 = \cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}$

b) $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_1 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right),$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

c) $z_0 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_1 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_2 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right),\ z_3 = 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

6124. a) $z^2 = \frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sätt $z = |z|(\cos u+\mathrm{i}\sin u)$

$z^2 = |z|^2(\cos 2u+\mathrm{i}\sin 2u)$

$\left|\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Sätt $\arg\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = v \quad\Rightarrow\quad \tan v = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

$v = -\frac{\pi}{3}+n\cdot\pi$

$\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ ligger i 4:e kvadranten.

$\arg\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

För att undvika negativa argument väljer vi istället

$\arg\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}+2\pi = \frac{5\pi}{3}$

$\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\right)\right)$

$|z|^2(\cos 2u+\mathrm{i}\sin 2u) =$

$= 1\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\right)\right)$

$\begin{cases}|z|^2 = 1\\ 2u = \frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 1\\ u = \frac{5\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k = 0,1\end{cases}$

$k = 0$ ger roten $z_0 = \cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}$

$k = 1$ ger roten

$z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right) = \cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}$

b) $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

Sätt $z = |z|(\cos u+\mathrm{i}\sin u)$

$z^3 = |z|^3(\cos 3u+\mathrm{i}\sin 3u)$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

Sätt $\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = v \quad\Rightarrow\quad \tan v = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

$v = -\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ ligger i 4:e kvadranten..

$\arg\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

För att undvika negativa argument väljer vi istället

$\arg\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}+2\pi = \frac{7\pi}{4}$

$\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\right)$

$|z|^3(\cos 3u+\mathrm{i}\sin 3u) =$

$= 1\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\right)$

$\begin{cases}|z|^3 = 1\\ 3u = \frac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 1\\ u = \frac{7\pi}{12}+k\cdot\frac{2\pi}{3},\ k = 0,1,2\end{cases}$

$k = 0$ ger roten $z_0 = \cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}$

$k = 1$ ger roten

$z_1 = \cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$

$k = 2$ ger roten

$z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{12}+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= \cos\frac{23\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}$

© Gennow, Gustafsson, Silborn och Gleerups Utbildning AB
Detta material ingår som en del i Exponent lärarmaterial
Materialet får skrivas ut, kopieras och användas under giltig licenstid

c) $z^4 = 2+2i$

Sätt $z = |z|(\cos u + i\sin u)$

$z^4 = |z|^4 (\cos 4u + i\sin 4u)$

$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

Talet $2+2i$ ligger i 1:a kvadranten och arg $2+2i = \frac{\pi}{4}$

$2+2i = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\right)$

$|z|^4 (\cos 4u + i\sin 4u) =$

$= 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)\right)$

$\begin{cases}|z|^4 = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} \\ 4u = \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{8}} \\ u = \frac{\pi}{16}+k\cdot\frac{\pi}{2},\ k = 0,1,2,3\end{cases}$

$k = 0$ ger roten $z_0 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

$k = 1$, 2 och 3 ger rötterna

$z_1 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$

$z_2 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$

$z_3 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$

Svar: a) $z_0 = \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6},\ z_1 = \cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$

b) $z_0 = \cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12},\ z_1 = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4},$

$z_2 = \cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}$

c) $z_0 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),\ z_1 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$

$z_2 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$

$z_3 = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$

6125. a) Vi ser att ekvationen har 4 rötter. Det är då en fjärdegradsekvation. $z^4 = c$

$n = 4$.

b) Av figuren kan vi utläsa att ex.vis talet $z_0 = 2+2i$

För alla lösningarna z gäller att

$|z_0| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$. Detta är alltså cirkelns radie eller med andra ord absolutbeloppet för samtliga ekvationens rötter. $z_0 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$z_0^4 = (\sqrt{8})^4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4 =$

$= 8^2\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8^2\ (\cos\pi + i\sin\pi) =$

$= 64(-1+0) = -64 = c$

Ekvationen är $z^4 = -64$

Svar: a) $n = 4$ b) $z^4 = -64$

6126. a) $z^3 = e^{i\cdot 2\pi} = (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = (\cos 0 + i\sin 0) =$

$= (\cos(k\cdot 2\pi) + i\sin(k\cdot 2\pi)) = 1$

$z = |z|(\cos u + i\sin u)$

$z^3 = |z|^3 (\cos 3u + i\sin 3u) = 1\cdot(\cos(k\cdot 2\pi)+i\sin(k\cdot 2\pi))$

$\begin{cases}|z|^3 = 1 \\ 3u = k\cdot 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|z| = 1 \\ u = k\cdot\frac{2\pi}{3},\ k = 0,1,2\end{cases}$

$k = 0,1,2$ ger rötterna $z_0 = 1\ (\cos 0 + i\sin 0) = 1$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

Lösningarna markerade i ett komplext talplan: se lärobokens facit.

b) $z^6 = 6e^{i\cdot\pi} = 6e^{i\cdot\pi + k\cdot 2\pi}$

$z = 6^{1/6}\ \left(e^{i\cdot(\pi+k\cdot 2\pi)}\right)^{1/6} = 6^{1/6}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right)}$ $(k = 0,1,2,3,4,5)$

$k = 0$ - 5 ger rötterna $z_0 = 6^{1/6}e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$,

$z_1 = 6^{1/6}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 6^{1/6}e^{\frac{i\pi}{2}}$

$z_2 = 6^{1/6}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 6^{1/6}e^{\frac{i5\pi}{6}}$

$z_3 = 6^{1/6}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{3}\right)} = 6^{1/6}e^{\frac{i7\pi}{6}}$

$z_4 = 6^{1/6}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 6^{1/6}e^{\frac{i9\pi}{6}}$

$z_5 = 6^{1/6}e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)} = 6^{1/6}e^{\frac{i11\pi}{6}}$

© Gennow, Gustafsson, Silborn och Gleerups Utbildning AB
Detta material ingår som en del i Exponent lärarmaterial
Materialet får skrivas ut, kopieras och användas under giltig licenstid

De sex talen ligger på en cirkel med medelpunkt i 0 och med radien $6^{1/6}$. Punkterna är placerade med en inbördes vinkelskillnad av $\frac{\pi}{6}$. Se lärobokens facit.

Svar: a) $z_0 = 1,\ \ z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$

$z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

b) $z_k = 6^{1/6} e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right)},\ k = 0,1,2,3,4,5$

6127. a) Det finns endast tre rötter. Ekvationen måste då vara en tredjegradsekvation. Graden är 3.
b) Samtliga tre rötter har absolutbeloppet 1.

$$\left|-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$\left|-\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

Talen ligger således alla på enhetscirkeln och är rötter till ekvationen $z^3 = 1$.

Svar: a) 3 b) $z^3 = 1$

6128. Sätt $z + i = w$

$w^3 = 8i$

$w^3 = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)\right),\ k = 0,1,2$

Sätt $w = |w|(\cos u + i\sin u)$

$w^3 = |w|^3(\cos 3u + i\sin 3u) =$

$= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)\right),\ k = 0,1,2$

$$\begin{cases} |w|^3 = 8 \\ 3u = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \\ u = \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3},\ k = 0,1,2 \end{cases}$$

$k = 0,1,2$ ger rötterna

$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\cdot 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\cdot 2\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\ \ 0 - i\ \ = -2i$

Således:

$z_0 = w_0 - i = \sqrt{3} + i - i = \sqrt{3}$

$z_1 = w_1 - i = -\sqrt{3} + i - i = -\sqrt{3}$

$z_2 = w_2 - i = -2i - i = -3i$

Svar: $z_0 = \sqrt{3},\ z_1 = -\sqrt{3},\ z_2 = 3i$

6129. a) Vi sätter in en av rötterna, t.ex. $z = 2i$ och får

$(2i)^6 = 2^6 \cdot i^6 = 64\cdot i^4 \cdot i^2 = 64\cdot 1\cdot(-1) = -64$

Således: $c = -64$.

b) Ekvationen är $z^6 = -64$ och har alltså reella koefficienter.
Vi vet då att icke-reella rötter är parvis konjugerade.
Eftersom $\sqrt{3} + i$ är en rot är också $\sqrt{3} - i$ en rot.
Eftersom $2i$ är en rot är också $-2i$ en rot.
Eftersom $-\sqrt{3} + i$ är en rot är också $-\sqrt{3} - i$ en rot.
c) Vi skriver vänsterledet i ekvationen
$z^6 + 64 = 0$ som en produkt.
Vi känner samtliga nollställen till polynomet och känner därmed också faktorerna.
Två faktorer är

$(z - (\sqrt{3} + i))(z - (\sqrt{3} - i)) = ((z - \sqrt{3}) + i))((z - \sqrt{3}) - i)) =$

$= (z - \sqrt{3})^2 - i^2 = z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 + 1 = z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$

Två andra faktorer är

$(z - 2i)(z - (-2i)) = (z - 2i)(z + 2i)) = z^2 - (2i)^2 = z^2 + 4$

och två faktorer är

$(z - (-\sqrt{3} + i))(z - (-\sqrt{3} - i)) =$

$= ((z + \sqrt{3}) - i))((z + \sqrt{3}) + i)) =$

$= (z + \sqrt{3})^2 - i^2 = z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 + 1 = z^2 + 2\sqrt{3}z + 4$

Vi kan således skriva

$z^6 + 64 = (z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 4)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$

Svar: a) $c = -64$ b) $\sqrt{3} - i,\ -2i$ och $-\sqrt{3} - i$

c) $z^6 + 64 = (z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 4)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$

© Gennow, Gustafsson, Silborn och Gleerups Utbildning AB
Detta material ingår som en del i Exponent lärarmaterial
Materialet får skrivas ut, kopieras och användas under giltig licenstid