6056. a) $(5-i)+(3+2i)=5-i+3+2i=8+i$

b) $(10+9i)-(11+5i)=10+9i-11-5i=-1+4i$

c) $\dfrac{1+i}{2}+\dfrac{3+5i}{2}=\dfrac{1+i+3+5i}{2}=\dfrac{4+6i}{2}=\dfrac{4}{2}+\dfrac{6i}{2}=2+3i$

d) $\dfrac{1+i}{2}-\dfrac{3+5i}{2}=\dfrac{1+i-(3+5i)}{2}=\dfrac{1+i-3-5i}{2}=$

$=\dfrac{-2-4i}{2}=-\dfrac{2}{2}-\dfrac{4i}{2}=-1-2i$

Svar: a) $8+i$ b) $-1+4i$ c) $2+3i$ d) $-1-2i$

6057. a) $2(2-\mathrm{i})+5(1-3\mathrm{i}) = 4-2\mathrm{i}+5-15\mathrm{i} = 9-17\mathrm{i}$

b) $0,5(3+5\mathrm{i})-1,5(2-3\mathrm{i}) = 1,5+2,5\mathrm{i}-3+4,5\mathrm{i} =$

$= -1,5+7\mathrm{i}$

c) $3(-4+10\mathrm{i})-6(0,5-2\mathrm{i}) = -12+30\mathrm{i}-3+12\mathrm{i} =$

$= -15+42\mathrm{i}$

d) $2(1-\mathrm{i})-3(2+\mathrm{i})+4(1+0,5\mathrm{i}) =$

$= 2-2\mathrm{i}-6-3\mathrm{i}+4+2\mathrm{i} = -3\mathrm{i}$

Svar: a) $9-17\mathrm{i}$ b) $-1,5+7\mathrm{i}$ c) $-15+42\mathrm{i}$ d) $-3\mathrm{i}$

6058. $z = x+y\mathrm{i} \Rightarrow \bar{z} = x-y\mathrm{i}$

a) $2z+3 = \bar{z}-\mathrm{i}$

$2(x+y\mathrm{i})+3 = x-y\mathrm{i}-\mathrm{i}$

$2x+2y\mathrm{i}+3 = x-y\mathrm{i}-\mathrm{i}$

$(2x+3)+2y\mathrm{i} = x+(-y-1)\mathrm{i}$

Realdelar och imaginärdelar i VL och HL sätts lika.

$$\begin{cases} 2x+3 = x \\ 2y = -y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$z = -3-\dfrac{\mathrm{i}}{3}$

b) $\dfrac{z-\bar{z}}{3} = -1+4\mathrm{i}$

$z-\bar{z} = 3(-1+4\mathrm{i})$

$x+y\mathrm{i}-(x-y\mathrm{i}) = -3+12\mathrm{i}$

$x+y\mathrm{i}-x+y\mathrm{i} = -3+12\mathrm{i}$

$2y\mathrm{i} = -3+12\mathrm{i}$

VL är rent imaginärt medan HL har realdelen –3.
Det är omöjligt.

c) $z+\mathrm{i} = \dfrac{\bar{z}-1}{2}$

$2(z+\mathrm{i}) = \bar{z}-1$

$2(x+y\mathrm{i}+\mathrm{i}) = x-y\mathrm{i}-1$

$2x+2y\mathrm{i}+2\mathrm{i} = x-y\mathrm{i}-1$

$2x+(2y+2)\mathrm{i} = x-1-y\mathrm{i}$

Realdelar och imaginärdelar i VL och HL sätts lika.

$$\begin{cases} 2x = x-1 \\ 2y+2 = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$z = -1-\dfrac{2\mathrm{i}}{3}$

d) $\dfrac{\bar{z}}{2}-\dfrac{2z}{3} = \mathrm{i}$

$\dfrac{x-y\mathrm{i}}{2}-\dfrac{2(x+y\mathrm{i})}{3} = \mathrm{i}$

Alla termer multipliceras med 6. Förkortning ger:

$3(x-y\mathrm{i})-4(x+y\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}$

$3x-3y\mathrm{i}-4x-4y\mathrm{i} = 6\mathrm{i}$

$-x-7y\mathrm{i} = 6\mathrm{i}$

Realdelar och imaginärdelar i VL och HL sätts lika.

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -7y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{6}{7} \end{cases}$$

$z = -\dfrac{6\mathrm{i}}{7}$

Svar: a) $z = -3-\dfrac{\mathrm{i}}{3}$ b) omöjligt

c) $z = -1-\dfrac{2\mathrm{i}}{3}$ d) $z = -\dfrac{6\mathrm{i}}{7}$

6059. $z = 5+2\mathrm{i} \Rightarrow \bar{z} = 5-2\mathrm{i}$

a) $z+\bar{z} = 5+2\mathrm{i}+5-2\mathrm{i} = 10$

b) $z-\bar{z} = 5+2\mathrm{i}-(5-2\mathrm{i}) = 5+2\mathrm{i}-5+2\mathrm{i} = 4\mathrm{i}$

c) $z+\bar{z}$ är ett reellt tal. $z-\bar{z}$ är ett rent imaginärt tal.
Sätt $z = x+y\mathrm{i}$ och $\bar{z} = x-y\mathrm{i}$

$z+\bar{z} = x+y\mathrm{i}+x-y\mathrm{i} = 2x$, som är reellt.

$z-\bar{z} = x+y\mathrm{i}-(x-y\mathrm{i}) = x+y\mathrm{i}-x+y\mathrm{i} = 2y\mathrm{i}$,
som är rent imaginärt.

Svar: a) 10 b) 4i c) -

6060. Se lärobokens facit.

6061. $z = 3+\mathrm{i}$ och $w = 1-2\mathrm{i}$

a) $z+w = 3+\mathrm{i}+1-2\mathrm{i} = 4-\mathrm{i}$

b) $\bar{z}+\bar{w} = (3-\mathrm{i})+(1+2\mathrm{i}) = 3-\mathrm{i}+1+2\mathrm{i} = 4+\mathrm{i}$

c) $\overline{z+w} = \overline{4-\mathrm{i}} = 4+\mathrm{i}$

d) Sätt $z = a+b\mathrm{i}$ och $w = c+d\mathrm{i}$

$z+w = a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i} = (a+c)+(b+d)\mathrm{i}$

$\overline{z+w} = (a+c)-(b+d)\mathrm{i}$

$\bar{z}+\bar{w} = (a-b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i}) = (a+c)-(b+d)\mathrm{i} = \overline{z+w}$,
vilket skulle visas.

Svar: a) 4 – i b) 4 + i c) 4 + i d) -

6062. $z = k^2(1+i) - k(2+3i) - 3 - 6i$

$z = k^2 + k^2 i - 2k - 3ki - 3 - 6i$

Vi skriver alla reella termer först och sedan de imaginära termerna. $z = k^2 - 2k - 3 + (k^2 - 3k - 6)i$

Om detta tal skall vara rent imaginärt gäller att

$k^2 - 2k - 3 = 0$

$k = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$

$k_1 = 1 + 2 = 3$ och $k_2 = 1 - 2 = -1$

$k = 3$ ger att

$z = 3^2(1+i) - 3(2+3i) - 3 - 6i =$

$= 9 + 9i - 6 - 9i - 3 - 6i = -6i$

$k = -1$ ger att

$z = (-1)^2(1+i) + 1 \cdot (2+3i) - 3 - 6i =$

$= 1 + i + 2 + 3i - 3 - 6i = -2i$

Svar: $k = 3$ ger $z = -6i$ och $k = -1$ ger $z = -2i$

6063. $z = x + yi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = x - yi$

b) $z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi$

Ekvationen kan således skrivas

$(z - \bar{z})^2 = (2yi)^2 = 4y^2 i^2 = -4y^2 = -16$

$y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

$z = x \pm 2i$, x kan väljas godtyckligt reellt.

$z = x \pm 2i$, x reellt