5061. a) $P(1 \le X \le 2) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{2} =$

$= \frac{2^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) $P(X \le \frac{3}{2}) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{\frac{3}{2}} =$

$= 0 + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4} - 0 = \frac{9}{16}$

c) $P(X \ge \frac{3}{2}) = 1 - P(X \le \frac{3}{2}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Svar: a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{7}{16}$

5062. a) $P(X \le 0,4) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{0,4} 2x\,dx = 0 + \left[x^2\right]_{0}^{0,4} =$

$= 0,4^2 - 0 = 0,16$

b) $P(X \ge 0,5) = 1 - P(X \le 0,5) = 1 - \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{0,5} 2x\,dx =$

$= 1 - \left[x^2\right]_{-0}^{0,5} = 1 - 0,5^2 + 0 = 1 - 0,25 = 0,75$

Svar: a) 0,16 b) 0,75

5063. a) För $x \le 0$ är $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

För $0 \le x \le 2$ är

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x}\left(1 - \frac{1}{2}t\right)dt =$

$= \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_{0}^{x} = x - \frac{x^2}{4} - 0 = x - \frac{x^2}{4}$

För $x \ge 2$ är

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{2}\left(1 - \frac{1}{2}t\right)dt + \int_{2}^{x} 0\,dt =$

$= \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_{0}^{2} = 0 + 2 - 1 - 0 = 1$

Således:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{då } x \le 0 \\ x - \frac{x^2}{4} \quad \text{då } 0 \le x \le 2 \\ 1 \ \text{ då } x \ge 2 \end{cases}$$

b) $P(X < 1) = F(1) = 1 - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Svar. a) $F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{då } x \le 0 \\ x - \frac{x^2}{4} \quad \text{då } 0 \le x \le 2 \\ 1 \ \text{ då } x \ge 2 \end{cases}$

b) $P(X < 1) = \frac{3}{4}$, $P(X > 1) = \frac{1}{4}$

5064. För en täthetsfunktion $f(x)$ gäller att $f(x) \ge 0$ och att

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Men $\int_{0}^{2} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_{0}^{2} = 8$.

$f(x)$ är ingen täthetsfunktion. Om vi förändrar $f(x)$ genom att dividera med 8, dvs. vi använder istället funktionen

$f(x) = \frac{3x^2}{8}$, så får vi en täthetsfunktion.

Svar: nej. Dividera funktionen med 8.

5065. a) Funktionen är $f(x) = ax$ i intervallet $0 \le x \le 5$ och 0 i övriga intervall.
Då gäller att

$\int_{0}^{5} ax\,dx = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_{0}^{5} = \frac{25a}{2} - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{25} = 0,08$

b) För $x \le 0$ är $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

För $0 \le x \le 5$ är

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 0,08t\ \ dt =$

$= \left[0,04t^2\right]_{0}^{x} = 0,04x^2 - 0 = 0,04x^2$

För $x \ge 5$ är

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{5} 0,04t^2\,dt + \int_{5}^{x} 0\,dt =$

$= \left[0,04t^2\right]_{0}^{5} = 0 + 1 - 0 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{då } x \le 0 \\ 0,04x^2 \quad \text{då } 0 \le x \le 5 \\ 1 \ \text{ då } x \ge 5 \end{cases}$$

Svar: a) $a = 0,08$ b) $F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{då } x \le 0 \\ 0,04x^2 \quad \text{då } 0 \le x \le 5 \\ 1 \ \text{ då } x \ge 5 \end{cases}$

5066. Se lösning i läroboken.