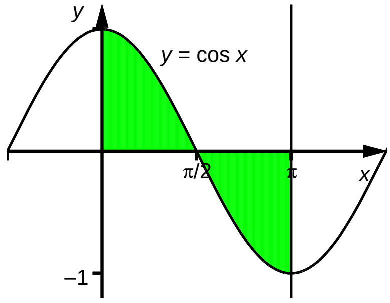
5053. $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

<u>Svar: 0</u>

5054. Grafen till funktionen $y = \cos x$ i intervallet $0 \le x \le \pi$



Arean är

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

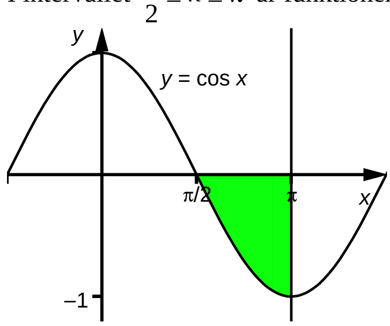
$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + (-\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}) = 1 - 0 - 0 + 1 = 2 \text{ a.e.}$$

<u>Svar: 2 a.e.</u>

5055. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

<u>Svar: –1</u>

5056. I intervallet $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ är funktionen $y = \cos x$ negativ.



Arean av det markerade området är

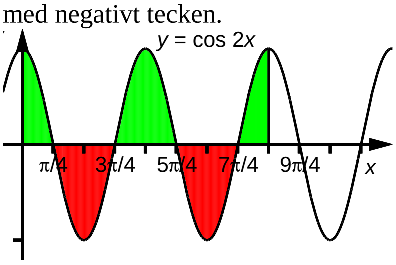
$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x \, dx = \left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1 \text{ a.e.}$$

<u>Svar: 1 a.e.</u>

5057. a) Integralen är noll eftersom området som ligger ovanför x-axeln är lika stort som området som ligger under x-axeln.
b) Integralen är negativ eftersom området som ligger ovanför x-axeln är mindre än området som ligger under x-axeln.
c) Integralen är positiv eftersom summan av de båda områden som ligger ovanför x-axeln är större än området som ligger under x-axeln

Svar: a) noll b) negativ c) positiv

5058. I figuren nedan har vi ritat grafen till funktionen $y = \cos 2x$ i intervallet $0 \le x \le 2\pi$.
När vi integrerar över detta intervall kommer areorna av de områden som ligger ovanför x-axeln (grönmarkerade) att räknas med positivt tecken medan de områden som ligger under x-axeln (rödmarkerade) kommer att räknas med negativt tecken.



a) Om vi vill integrera funktionen från noll och så att integralen blir så stor som möjligt kan vi avbryta redan efter det första grönmarkerade området, dvs. då $x = \frac{\pi}{4}$.

Vi kan också fortsätta fram t.o.m. $x = \frac{5\pi}{4}$. Vi får då med ett positivt (grönmarkerat) område och ett lika stort negativt (rödmarkerat) område som tar ut varandra och integralen blir lika stor som tidigare.

Således $b = \frac{\pi}{4}$ eller $b = \frac{5\pi}{4}$

b) Om vi vill integrera funktionen från noll så att integralen blir så liten som möjligt får vi integrera så att vi får med hela det första rödmarkerade området, dvs. t.o.m. $x = \frac{3\pi}{4}$. Vi väljer $b = \frac{3\pi}{4}$.

Vi kan också fortsätta integrationen t.o.m. $x = \frac{7\pi}{4}$

Svar: a) $b = \frac{\pi}{4}$ eller $b = \frac{5\pi}{4}$ b) $b = \frac{3\pi}{4}$ eller $b = \frac{7\pi}{4}$

5059. a) Om den totala arean mellan funktionskurvan och x-axeln skall bli så stor som möjligt bör vi integrera över så stort intervall som möjligt, dvs. vi väljer $b = 2\pi$.
b) Om arean skall bli så liten som möjligt skall vi integrera över ett så litet intervall som möjligt. Om vi väljer $b = 0$ blir områdets area noll.

Svar: a) $b = 2\pi$ b) $b = 0$

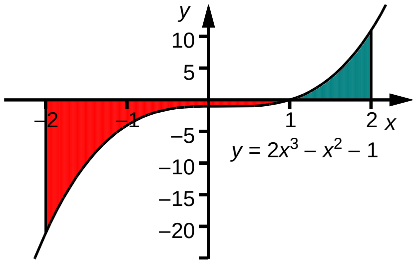
5060. a) $$\int_{-2}^{2} 2x^3 - x^2 - 1 \, dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{2^4}{2} - \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{(-2)^4}{2} - \frac{(-2)^3}{3} - (-2)\right) = .$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - 2 - \left(8 + \frac{8}{3} + 2\right) = 8 - \frac{8}{3} - 2 - 8 - \frac{8}{3} - 2 =$$

$$= -4 - \frac{16}{3} = -\frac{28}{3} \approx -9{,}33$$

b) Figuren visar grafen till funktionen $y = 2x^3 - x^2 - 1$ i intervallet $-2 \le x \le 2$.
Kurvan skär x-axeln för $x = 1$.
$y(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 1 = 0$



I intervallet $-2 \le x \le 1$ är funktionen negativ och området mellan kurvan och x-axeln ligger under x-axeln.
I intervallet $1 \le x \le 2$ är funktionen positiv.
Om vi vill beräkna summan av dessa areor måste vi beräkna integralerna

$$\int_{-2}^{1} -\ 2x^3 - x^2 - 1 \, dx + \int_{1}^{2} 2x^3 - x^2 - 1 \, dx$$

(Obs. minustecknet i den första integralen.)

$$\int_{-2}^{1} -\ 2x^3 - x^2 - 1 \, dx + \int_{1}^{2} 2x^3 - x^2 - 1 \, dx =$$

$$\int_{-2}^{1} -2x^3 + x^2 + 1 dx + \int_{1}^{2} 2x^3 - x^2 - 1 \, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} =$$

$$= -\frac{1^4}{2} + \frac{1^3}{3} + 1 - \left(-\frac{(-2)^4}{2} + \frac{(-2)^3}{3} + (-2)\right) + .$$

$$+ \frac{2^4}{2} - \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^4}{2} - \frac{1^3}{3} - 1\right) = .$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 + 8 + \frac{8}{3} + 2 + 8 - \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 = .$$

$$= 17 + \frac{2}{3} = \frac{51}{3} + \frac{2}{3} = \frac{53}{3} \approx 17{,}7 \text{ a.e.}$$

c) Se lärobokens facit.

Svar: a) $-\frac{28}{3} \approx -9{,}33$ b) $\frac{53}{3} \approx 17{,}7$ a.e. c) -