2018. a) $f(x)=3^x$

Sätt $y=3^x$ och lös ut x.

${}^3\log y = {}^3\log 3^x \quad \Rightarrow \quad {}^3\log y = x$

Variabelbyte ger $y = {}^3\log x$

$f^{-1}(x) = {}^3\log x$

(Funktionen kan också skrivas på andra sätt, t.ex.

$f^{-1}(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 3}$)

Grafer: se lärobokens facit.

b) Funktionen $f(x)=3^x$ är definierad för alla x.

Funktionsvärdena är positiva tal.

Den inversa funktionen $f^{-1}(x) = {}^3\log x$ är definierad för positiva x-värden och funktionsvärdena är alla reella tal.

$\mathrm{D}_f = \mathrm{V}_{f^{-1}} = \mathbf{R},\ \mathrm{V}_f = \mathrm{D}_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

c) Se lärobokens facit.

Svar: a) $f^{-1}(x) = {}^3\log x$

b) $\mathrm{D}_f = \mathbf{R},\ \mathrm{V}_f = \{y \in \mathbf{R} : y > 0\}$

$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}, \mathrm{V}_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ c) -

2019. a) $f(x)=0,5^x$

Sätt $y=0,5^x$ och lös ut x.

${}^{0,5}\log y = {}^{0,5}\log 3^x \quad \Rightarrow \quad {}^{0,5}\log y = x$

Variabelbyte ger $y = {}^{0,5}\log x$

$f^{-1}(x) = {}^{0,5}\log x$

(Funktionen kan också skrivas på andra sätt, t.ex.

$f^{-1}(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 0,5}$)

Grafer: se lärobokens facit.

b) Funktionen $f(x)=0,5^x$ är definierad för alla x.

Funktionsvärdena är reella tal.

Den inversa funktioen $f^{-1}(x) = {}^{0,5}\log x$ är definierad för positiva x-värden och funktionsvärdena är alla reella tal.

$\mathrm{D}_f = \mathrm{V}_{f^{-1}} = \mathbf{R},\ \mathrm{V}_f = \mathrm{D}_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

c) Se lärobokens facit.

Svar: a) $f^{-1}(x) = {}^{0,5}\log x$

b) $\mathrm{D}_f = \mathbf{R},\ \mathrm{V}_f = \{y \in \mathbf{R} : y > 0\}$

$\mathrm{D}_{f^{-1}} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}, \mathrm{V}_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ c) -

2020. $f(x) = \lg\dfrac{1}{x} = \lg 1 - \lg x = -\lg x$

Logaritmer är definierade för positiva tal.

Svar: $x > 0$

2021. $f(x)=\ln 2x$

Sätt $y = \ln 2x$ och lös ut x.

$\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln 2x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln 2x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^y = 2x$

$x = \dfrac{\mathrm{e}^y}{2}$

Variabelbyte ger $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$

Svar: $f^{-1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$

2022. a) $g(x) = x-1$

Låt $f(x) = \lg x$

Den sammansatta funktionen är

$f(g(x)) = \lg(x-1)$

b) Logaritmer är bara definierade för positiva tal.

x måste vara större än 1.

Svar: a) $f(g(x)) = \lg(x-1)$ b) $\mathrm{D} = \{x \in \mathbf{R} : x > 1\}$

2023. a) $f(x)=\ln x$ är definierad för alla $x > 0$.
För sådana x är funktionen strängt växande.
b) $f(x)=\ln x^2$ är definierad för alla $x \neq 0$..
För $x < 0$ är funktionen strängt avtagande och för $x > 0$ är funktionen strängt växande.
Man undersöker detta genom att rita grafen eller genom att studera värdetabeller med lämpligt valda x-värden.

Svar: a) strängt växande för alla $x > 0$
b) strängt avtagande för $x < 0$ och strängt växande för $x > 0$

2024. $f(x)=e^{x-1}$
Sätt $y=e^{x-1}$ och lös ut x.
$\ln y=\ln e^{x-1} \quad\Rightarrow\quad \ln y = x-1 \quad\Rightarrow\quad x=\ln y+1$
Variabelbyte ger $y=\ln x+1$
$f^{-1}(x)=\ln x+1$
Funktionen är strängt växande. Logaritmer är definierade endast för positiva tal. $D=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$

Svar: a) $f^{-1}(x)=\ln x+1$
b) strängt växande, $D=\{x\in\mathbf{R} : x>0\}$

2025. a) $f(x)=\lg(x+2)$
Logaritmer är definierade endast för positiva tal.
$x+2>0 \quad\Rightarrow\quad x>-2 \qquad D=\{x\in\mathbf{R} : x>-2\}$
b) Sätt $y=\lg(x+2)$ och lös ut x.
$10^y=10^{\lg(x+2)} \quad\Rightarrow\quad 10^y=x+2 \quad\Rightarrow\quad x=10^y-2$
Variabelbyte ger $y=10^x-2$
$f^{-1}(x)=10^x-2$
Exponentialfunktioner är definierade för alla reella x.
$D=\mathbf{R}$

Svar: a) $D=\{x\in\mathbf{R} : x>-2\}$
b) $f^{-1}(x)=10^x-2,\; D=\mathbf{R}$

2026. $f(x)=\ln(x^2-4)$
Logaritmer är definierade endast för positiva tal.
$f(x)=\ln(x^2-4)$ är således inte definierad för
$x^2-4\le 0 \quad\Rightarrow\quad x^2\le 4 \quad\Rightarrow\quad -2\le x\le 2$

Svar: $-2\le x\le 2$

2027. $f(x)=10^{x+1},\; g(x)=\lg x-1$
a) $f(g(x)) = f\;\lg x-1\; = 10^{(\lg x-1)+1} = 10^{\lg x} = x$
b) $g(f(x)) = g\;10^{x+1}\; = \lg 10^{x+1}-1=(x+1)-1=x$
c) Vilken är den inversa funktionen till $f(x)=10^{x+1}$?
Sätt $y=10^{x+1}$ och lös ut x.
$\lg y=\lg 10^{x+1} \quad\Rightarrow\quad \lg y=x+1 \quad\Rightarrow\quad x=\lg y-1$
Variabelbyte ger $y=\lg x-1$
$f^{-1}(x)=g(x)=\lg x-1$
Vi ser av detta att $f(x)=10^{x+1}$ och $g(x)=\lg x-1$ är varandras inverser. Då gäller att
$f(g(x))=g(f(x))=x$

Svar: a) $f(g(x)) = x$ b) $g(f(x)) = x$ c) $f(x)$ och $g(x)$ är varandras inverser

2028. $f(x)=\lg\dfrac{x^2-1}{x}$
Logaritmer är bara definierade för positiva tal.
Således: $\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}>0$
Vi kan avgöra detta på olika sätt men vi gör här ett teckenschema och studerar uttryckets tecken i intervallen $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ och $x > 1$.

x		-1		0		1	
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	0	+
x	−	−	−	0	+	+	+
$\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$	−	0	+		−	0	+

Vi ser att $\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}>0$ i intervallen
$-1<x<0$ och $x>1$

Svar: $-1 < x < 0$ och $x > 1$

2029. $f(x)=\dfrac{5}{x-1},\; g(x)=\ln x$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{5}{x-1}\right)=\ln\left(\dfrac{5}{x-1}\right)=$
$=\ln 5-\ln(x-1)$
Logaritmer är definierade bara för positiva tal.
Således är $(g\circ f)(x)$ definierad för $x>1$
$D=\{x\in\mathbf{R} : x>1\}$

Svar: $(g\circ f)(x)=\ln 5-\ln(x-1)$,
$D=\{x\in\mathbf{R} : x>1\}$

2030. $f(g(x))=e^{\lg x}$
Logaritmer är definierade bara för positiva tal.

Således är lg x definierat för $x > 0$ och därmed är definitionsmängden för $f(g(x))$ $D = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

$f(g(x))$ är sammansatt av funktionerna $f(x) = e^x$ som är definierad för alla reella tal, och $g(x) = \lg x$, som är definierad för $x > 0$.

Svar: $D_{f(g(x))} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$,

$D_{f(x)} = \mathbf{R}$, $D_{g(x)} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$