Blandade övningar

1. Kurva B har samma amplitud och period som kurva A. Kurva A är förskjuten 30° åt vänster medan urva B är förskjuten 15° åt höger jämfört med $y = \sin x$. Kurva B:s ekvation är då $y = 2\sin(x - 15^{\circ})$.

   Svar: $y = 2\sin(x - 15^{\circ})$

2. Funktionen $y = \sin x$ är växande i intervallet $60^{\circ} \le x \le 90^{\circ}$. Funktionens största värde är 1 som antas då $x = 90^{\circ}$. Funktionen är sedan avtagande i intervallet $90^{\circ} \le x \le 150^{\circ}$. $\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 150^{\circ} = \frac{1}{2}$

   $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Minsta värdet i intervallet är således $\frac{1}{2}$.

   Värdemängden kan skrivas V = $x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2} \le y \le 1$

   Svar: V = $y \in \mathbf{R} : \frac{1}{2} \le y \le 1$

3. Om vi istället mäter vinkeln från positiva x-axeln är denna vinkel $270^{\circ} - v$

   Vi får då att $\cos(270^{\circ} - v) = -\frac{3}{5}$

   och att $\sin(270^{\circ} - v) = -\frac{4}{5}$

   a) $\cos(270^{\circ} - v) = \cos(270^{\circ} - v - 360^{\circ}) =$

   $= \cos(-90^{\circ} - v) = \cos(90^{\circ} + v) = -\sin v = -\frac{3}{5}$

   $\sin v = \frac{3}{5}$

   b) $\sin(270^{\circ} - v - 360^{\circ}) = \sin(-90^{\circ} - v) =$

   $= -\sin(90^{\circ} + v) = -\cos v = -\frac{4}{5}$

   $\cos v = \frac{4}{5}$

   c) $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

   Svar: a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$

4. $f(x) = 1 + \sin x \cos x = 1 + \frac{2\sin x \cos x}{2} = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$

   $\frac{\sin 2x}{2}$ har $\frac{1}{2}$ som sitt största värde och $-\frac{1}{2}$ som sitt minsta värde.

   Maximivärdet för $f(x)$ är 1 + $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{2}$ och minimivärdet är 1 − $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$.

   Svar: Maximivärdet är $\frac{3}{2}$ och minimivärdet är $\frac{1}{2}$

5. a) $75^{\circ} = \frac{75^{\circ}}{180^{\circ}} \cdot \pi = \frac{5\pi}{12}$

   b) $315^{\circ} = \frac{315^{\circ}}{180^{\circ}} \cdot \pi = \frac{7\pi}{4}$

   Svar: a) $\frac{5\pi}{12}$ b) $\frac{7\pi}{4}$

6. a) $\sin v = -\frac{1}{2}$

   $$\begin{cases} v = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ v = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

   $$\begin{cases} v = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ v = -\frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

   I intervallet $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ finns endast

   $v = -\frac{\pi}{6}$

b) $\cos v = \frac{1}{2}$

$v = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

I intervallet $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ finns endast

$v = \pm\frac{\pi}{3}$

c) $\tan v = -1$

$v = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

I intervallet $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ finns endast

$v = -\frac{\pi}{4}$

Svar. a) $v = -\frac{\pi}{6}$ b) $v = \pm\frac{\pi}{3}$ c) $v = -\frac{\pi}{4}$

7. a) $\sin 3x = -\sin 2x$

$\sin 3x = \sin(-2x)$

$\begin{cases} 3x = -2x + n \cdot 360^o \\ 3x = 180^o - (-2x) + n \cdot 360^o \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = +n \cdot 360^o \\ x = 180^o + n \cdot 360^o \end{cases}$

$\begin{cases} x = +n \cdot 72^o \\ x = 180^o + n \cdot 360^o \end{cases}$

b) $\cos(x + 30^o) = -\cos(x + 60^o)$

$\cos(x + 30^o) = \cos(180^o - (x + 60^o))$

$\cos(x + 30^o) = \cos(120^o - x)$

$x + 30^o = \pm(120^o - x) + n \cdot 360^o$

$\begin{cases} x + 30^o = 120^o - x + n \cdot 360^o \\ x + 30^o = -(120^o - x) + n \cdot 360^o \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = 90^o + n \cdot 360^o \\ x + 30^o = -120^o + x + n \cdot 360^o \end{cases}$ (orimligt!)

$x = 45^o + n \cdot 180^o$

Svar: a) $\begin{cases} x = +n \cdot 72^o \\ x = 180^o + n \cdot 360^o \end{cases}$ b) $x = 45^o + n \cdot 180^o$

8. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $90^o < x < 180^o$

a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x =$

$= 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

b) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{9}{10}}$

I intervallet $90^o < x < 180^o$ gäller att $\cos x < 0$

$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

$sn2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

c) $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

Svar: a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{24}{25}$

9. A) $\cos x = -0,3$

$x = \pm 1,9 + n \cdot 2\pi$

I intervallet $0 \le x \le \pi$ finns bara en lösning, $x = 1,9$.

B) $\sin x = 0,8$

$\begin{cases} x = 0,93 + n \cdot 2\pi \\ x = \pi - 0,93 + n \cdot 2\pi \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0,93 + n \cdot 2\pi \\ x = 2,21 + n \cdot 2\pi \end{cases}$

I intervallet $0 \le x \le \pi$ finns två lösningar

$x_1 = 0,93$. Och $x_2 = 2,21$

Svar: B har två lösningar i intervallet

10. $f(x) = 3 - 0,5\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Amplituden är 0,5, perioden är $\frac{2\pi}{2} = \pi$, maximivärdet är 3+ 0,5 = 3,5 och kurvan är förskjuten $\frac{\pi}{6}$ i *x*-led och 3 i *y*-led i förhållande till kurvan $-0,5\cos 2x$

11. Kurvan är förskjuten 2 steg i *y*-led. Det ger att *a* = 2. Kurvan har amplituden 1, men *b* = –1 eftersom kurvan är avtagande för *x* = 0. ($y = \sin 2x$ är växande för *x* = 0.)

Svar: *a* = 2, *b* = –1

12. a) $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{25}{169} = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\sin v = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\pm\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \pm\frac{12}{5}$

b) $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$\sin v = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\pm\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{15}$

Svar: a) $\sin v = \pm\frac{12}{13}$, $\tan v = \pm\frac{12}{5}$

b) $\sin v = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan v = \pm\sqrt{15}$

13. $(1 - \cos v)(1 + \cos v) = 1 - \cos^2 v = \sin^2 v$
(Trigonometriska ettan och konjugatregeln)

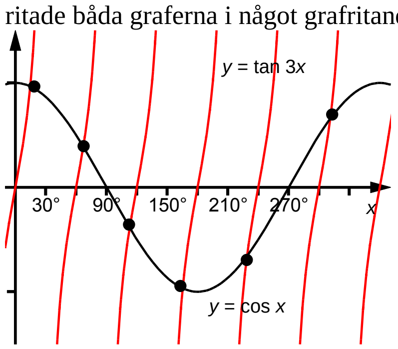
Svar: $\sin^2 v$

14. a) Bågen $b = v \cdot r$, där b är bågen och r är radien.
$b = v \cdot r = 2{,}1 \cdot 3{,}4 \text{ cm} = 7{,}1 \text{ cm}$

b) Medelpunktsvinkeln är $v = \frac{b}{r} = \frac{8{,}3}{3{,}4} = 2{,}4$ rad.

Svar: a) 7,1 cm b) 2,4 rad.

15. Ekvationen löses noggrannast analytiskt, men vi kan ritade båda graferna i något grafritande program.



Vi ser att graferna skär varandra i 6 punkter i intervallet $0^{\circ} \le x < 360^{\circ}$. Vi kan i figuren ungefärligen finna x-värdena för skärningspunkterna, men för att få fram stor noggrannhet kan vi t.ex. testa oss fram med räknarens hjälp. De är $x_1 = 14{,}7^{\circ}$, $x_2 = 67{,}1^{\circ}$, $x_3 = 112{,}9^{\circ}$, $x_4 = 165{,}3^{\circ}$, $x_5 = 228{,}9^{\circ}$ och $x_6 = 311{,}1^{\circ}$

Svar: $x_1 = 14{,}7^{\circ}$, $x_2 = 67{,}1^{\circ}$, $x_3 = 112{,}9^{\circ}$, $x_4 = 165{,}3^{\circ}$,
$x_5 = 228{,}9^{\circ}$ och $x_6 = 311{,}1^{\circ}$

16. $\sin v = \frac{3}{8}$

a) $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 1 - \frac{9}{64} = \frac{64}{64} - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$

$\cos v = \pm\sqrt{\frac{55}{64}} = \pm\frac{\sqrt{55}}{8}$

b) $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{8}}{\pm\frac{\sqrt{55}}{8}} = \pm\frac{3}{\sqrt{55}}$

c) $\sin(180^{\circ} - v) = \sin v = \frac{3}{8}$

d) $\cos(v + 90^{\circ}) = -\sin v = -\frac{3}{8}$

Svar : a) $\pm\frac{\sqrt{55}}{8}$ b) $\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{3}{8}$

17. a) Förskjutning $\frac{\pi}{4}$ åt höger innebär att x ersätts med $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Förskjutning 1 steg uppåt innebär att $f(x)$ ökas med 1. Den nya funktionen är $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

b) $-1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

Funktionen $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ har då värdemängden

$V = \; y \in \mathbf{R}; 0 \le y \le 2$

Svar: a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ b) $V = \; y \in \mathbf{R} : 0 \le y \le 2$

18. $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

a) $f(0) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

c) $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

Svar: a) $-\sqrt{3}$ b) 1 c) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi \end{cases}$

19. a) $\sin(x + 15^\circ) = 0{,}15$

$$\begin{cases} x + 15^\circ = 8{,}6^\circ + n\cdot 360^\circ \\ x + 15^\circ = 180^\circ - 8{,}6^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8{,}6^\circ - 15^\circ + n\cdot 360^\circ \\ x = 180^\circ - 8{,}6^\circ - 15^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6{,}4^\circ + n\cdot 360^\circ \\ x = 156{,}4^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases}$$

b) $2\cos 2x = 0{,}84$

$\cos 2x = 0{,}42$

$2x = \pm 65{,}2^\circ + n\cdot 360^\circ$

$x = \pm 32{,}6^\circ + n\cdot 180^\circ$

c) $\tan(x - 25^\circ) = 2{,}5$

$x - 25^\circ = 68{,}2^\circ + n\cdot 180^\circ$

$x = 68{,}2^\circ + 25^\circ + n\cdot 180^\circ$

$x = 93{,}2^\circ + n\cdot 180^\circ$

d) $\sin\frac{x - 24^\circ}{2} = 0{,}65$

$$\begin{cases} \frac{x - 24^\circ}{2} = 40{,}5^\circ + n\cdot 360^\circ \\ \frac{x - 24^\circ}{2} = 180^\circ - 40{,}5^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x - 24^\circ}{2} = 40{,}5^\circ + n\cdot 360^\circ \\ \frac{x - 24^\circ}{2} = 139{,}5^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 24^\circ = 81{,}1^\circ + n\cdot 720^\circ \\ x - 24^\circ = 278{,}9^\circ + n\cdot 720^\circ \end{cases}$$

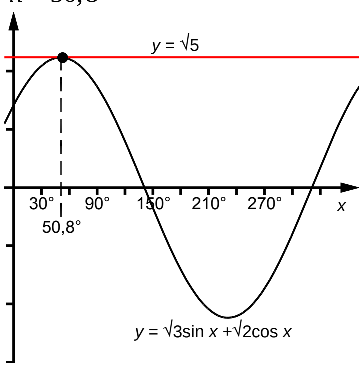
$$\begin{cases} x = 105{,}1^\circ + n\cdot 720^\circ \\ x = 302{,}9^\circ + n\cdot 720^\circ \end{cases}$$

Svar: a) $\begin{cases} x = -6{,}4^\circ + n\cdot 360^\circ \\ x = 156{,}4^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases}$

b) $x = \pm 32{,}6^\circ + n\cdot 180^\circ$

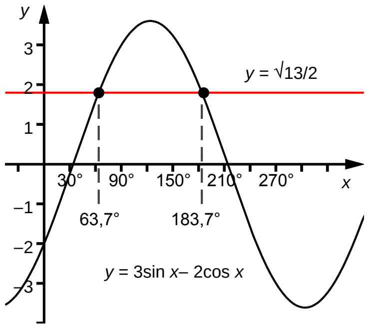
c) $x = 93{,}2^\circ + n\cdot 180^\circ$ d) $\begin{cases} x = 105{,}1^\circ + n\cdot 720^\circ \\ x = 302{,}9^\circ + n\cdot 720^\circ \end{cases}$

20. a) Vi ritar grafrena till funktionerna $y = \sqrt{3}\sin x + \sqrt{2}\cos x$ och $y = \sqrt{5}$ i något grafritande program. Vi ser att de i intervallet $0^\circ \le x < 360^\circ$ endast skär varandra i en punkt, som är markerad i figuren nedan. Med räknarens hjälp kan vi hitta ett närmevärde till denna punkts x-värde som är $x = 50{,}8^\circ$



b) Graferna till funktionerna $y = 3\sin x - 2\cos x$ och $y = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ritas med något grafritande program. Vi ser att de i intervallet $0^\circ \le x < 360^\circ$ skär varandra i två punkter som är markerade i figuren. Vi finner bra närmevärden till dessa punkters x-koordinater med räknarens hjälp.

De är $x_1 = 63{,}7^{\circ}$ och $x_2 = 183{,}7^{\circ}$.



Svar: a) $x = 50{,}8^{\circ}$ b) $x_1 = 63{,}7^{\circ}$, $x_2 = 183{,}7^{\circ}$

21. $\cos^2 x + \sin 2x = 1$

$1 - \sin^2 x + \sin 2x = 1$ (Trigonometriska ettan)

$\sin 2x - \sin^2 x = 0$

$2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ (Formel för dubbla vinkeln)

$\sin x(2\cos x - \sin x) = 0$

I. $\sin x = 0$

$x = n \cdot 180^{\circ}$

II. $2\cos x - \sin x = 0$

$$\frac{2\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$\tan x = 2$

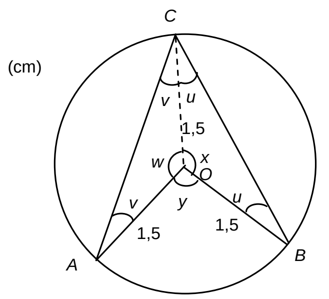
$x = 63{,}4^{\circ} + n \cdot 180^{\circ}$

Svar: $\begin{cases} x = n \cdot 180^{\circ} \\ x = 63{,}4^{\circ} + n \cdot 180^{\circ} \end{cases}$

22. O är cirkelns medelpunkt. Vi drar radien OC och vi har därmed två likbenta trianglar, AOC och BOC.

$v = \angle CAO = \dfrac{13\pi}{60}$, $u = \angle CBO = \dfrac{5\pi}{18}$.

Medelpunktsvinklarna är w, x och y.



Eftersom trianglarna är likbenta (två sidor i vardera triangeln är radier i cirkeln) gäller

$$w = \pi - 2v = \pi - 2 \cdot \frac{13\pi}{60} = \frac{60\pi}{60} - \frac{26\pi}{60} = \frac{17\pi}{30}$$

$$x = \pi - 2u = \pi - 2 \cdot \frac{5\pi}{18} = \frac{18\pi}{18} - \frac{10\pi}{18} = \frac{8\pi}{18} = \frac{4\pi}{9}$$

(Vinkelsumman i en triangel är π.)

$$\angle C = v + u = \frac{13\pi}{60} + \frac{5\pi}{18} = \frac{39\pi}{180} + \frac{50\pi}{180} = \frac{89\pi}{180}$$

Då gäller att $y = \angle C = 2 \cdot \dfrac{89\pi}{180} = \dfrac{89\pi}{90}$

(Medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som randvinkeln som står på samma båge.)
Båglängden är lika med medelpunktsvinkeln multiplicerat med radien.

Bågen $AC = w \cdot r = \dfrac{17\pi}{30} \cdot 1{,}5$ cm $= \dfrac{17\pi}{20}$ cm

Bågen $AB = y \cdot r = \dfrac{89\pi}{90} \cdot 1{,}5$ cm $= \dfrac{89\pi}{60}$ cm

Bågen $BC = x \cdot r = \dfrac{4\pi}{9} \cdot 1{,}5$ cm $= \dfrac{2\pi}{3}$ cm

Svar: $AC = \dfrac{17\pi}{20}$ cm, $AB = \dfrac{89\pi}{60}$ cm, $BC = \dfrac{2\pi}{3}$ cm

23. Se lösning i lärobokens facit.

24. a) $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x =$

$= \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin 2x =$

$= 1 - 2\sin x \cos x + \sin 2x = 1 - \sin 2x + \sin 2x = 1$

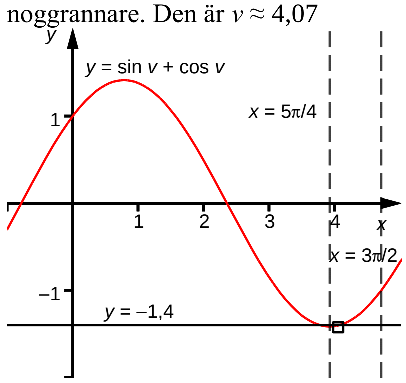
b) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} =$

$= \dfrac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = \cos x - \sin x$

(Formel för dubbla vinkeln och konjugatregeln)

Svar: a) 1 b) $\cos x - \sin x$

25. Graferna till $y = \sin v + \cos v$ och $y = -1{,}4$ ritas.
Vi ser att de i det angivna intervallet (streckat i figuren) skär varandra i en punkt när a den trigonometriska funktionens minimipunkt. Med räknaren (eller på annat sätt) hjälp kan vi hitta denna skärningspunkt noggrannare. Den är $v \approx 4{,}07$



Svar: $v = 4{,}1$

26. Se lösning i lärobokens facit.

27. $\tan v = -\sqrt{5}$

$\frac{\sin v}{\cos v} = -\sqrt{5}$

$\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = (-\sqrt{5})^2 = 5$

$\frac{1-\cos^2 v}{\cos^2 v} = 5$

$\frac{1}{\cos^2 v} - 1 = 5$

$\frac{1}{\cos^2 v} = 6 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 v = \frac{1}{6}$

$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

a) $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

b) $0^{\circ} < v < 180^{\circ}$ och $\tan v = -\sqrt{5}$ innebär att $90^{\circ} < v < 180^{\circ}$ och att $\sin v > 0$ och $\cos v < 0$

$\cos^2 v = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \cos v = -\sqrt{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\sin^2 v = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \sin v = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$\sin 2v = 2\sin v \cos v = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $0^{\circ} < v < 180^{\circ}$ innebär att $0^{\circ} < \frac{v}{2} < 90^{\circ}$

och $\sin\frac{v}{2} > 0$, $\cos\frac{v}{2} > 0$, $\tan\frac{v}{2} > 0$

$$\tan^2\frac{v}{2} = \frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{\frac{1-\cos v}{2}}{\frac{1+\cos v}{2}} = \frac{1-\cos v}{1+\cos v} =$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{6}}}{1-\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1} = \frac{(\sqrt{6}+1)^2}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{6}+1)^2}{6-1} = \frac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}$$

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{(\sqrt{6}+1)^2}{5}} = \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6}+1)}{5} =$$

$$= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{5}}{5}$$

Svar: a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{30}+\sqrt{5}}{5}$

28. $f(x) = 5 + A\sin 3x$

Eftersom $-1 \le \sin 3x \le 1$ gäller att funktionens största värde är $5 + A$ och dess minsta värde är $5 - A$.

$5 + A = 2(5 - A)$

$5 + A = 10 - 2A \quad \Rightarrow \quad 3A = 5 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5}{3}$

Svar: $A = \frac{5}{3}$

29. Sätt $\frac{x}{2} = v$

Vi vill uttrycka $\sin 3v$ i $\sin v$.

$\sin 3v = \sin(2v + v) = \sin 2v \cdot \cos v + \cos 2v \sin v =$

$= 2\sin v \cdot \cos^2 v + (\cos^2 - \sin^2 v)\sin v =$

$= 2\sin v \cdot (1 - \sin^2 v) + (1 - \sin^2 v - \sin^2 v)\sin v =$

$= 2\sin v - 2\sin^3 v + \sin v - 2\sin^3 v = 3\sin v - 4\sin^3 v =$

$= 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}$

Svar: $\sin\frac{3x}{2} = 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}$

30. Vart 5:e fält har en grön prick. De gröna prickarna upptar därmed $\frac{1}{5}$ av ett helt varv, vilket motsvarar en medelpunktsvinkel $\frac{1}{5} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{5}$

Svar: $\frac{2\pi}{5}$

31. Alla trianglar i figuren är rätvinkliga.
Vi får därför

$\tan v = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1} = BC$

$\sin v = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{BC}{\sin v}$

$\tan v = \frac{CD}{AC}$

$CD = AC \cdot \tan v = \frac{BC}{\sin v} \cdot \tan v = \frac{BC}{\cos v} =$

$= \frac{\tan v}{\cos v} = \frac{\sin v}{\cos^2 v}$

$\sin v = \frac{CD}{AD} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{CD}{\sin v} = \frac{\frac{\sin v}{\cos^2 v}}{\sin v} = \frac{1}{\cos^2 v}$

$\tan v = \frac{DE}{AD}$

$$DE = AD\cdot \tan v = \frac{1}{\cos^2 v}\cdot \tan v = \frac{\sin v}{\cos^3 v}$$

$$\sin v = \frac{DE}{AE} \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{DE}{\sin v} = \frac{\frac{\sin v}{\cos^3 v}}{\sin v} = \frac{1}{\cos^3 v}$$

Omkretsen är $AB + BC + CD + DE + AE =$

$$= 1+\tan v + \frac{\sin v}{\cos^2 v} + \frac{\sin v}{\cos^3 v} + \frac{1}{\cos^3 v} =$$

$$= 1+\tan v\cdot\left(1+\frac{1}{\cos v}+\frac{1}{\cos^2 v}\right)+\frac{1}{\cos^3 v}$$

Svar: $1+\tan v\cdot\left(1+\frac{1}{\cos v}+\frac{1}{\cos^2 v}\right)+\frac{1}{\cos^3 v}$

32. a) $\frac{\tan^2 v}{1+\tan^2 v} = \frac{\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}{1+\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}} = \frac{\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}{\frac{\cos^2 v}{\cos^2 v}+\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}} =$

$$= \frac{\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}{\frac{\cos^2 v+\sin^2 v}{\cos^2 v}} = \frac{\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}{\frac{1}{\cos^2 v}} = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}\cdot\frac{\cos^2 v}{1} = \sin^2 v$$

vilket skulle visas.

b) $\left(\frac{1}{\tan v}+\frac{1}{\sin v}\right)\left(\frac{1}{\tan v}-\frac{1}{\sin v}\right)+1=$

$$= \frac{1}{\tan^2 v}-\frac{1}{\sin^2 v}+1 = \frac{1}{\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}-\frac{1}{\sin^2 v}+1=$$

$$= \frac{\cos^2 v-1}{\sin^2 v}+1 = \frac{-\sin^2 v}{\sin^2 v}+1 = -1+1 = 0$$, vilket skulle visas.

33. a) Se lösning i lärobokens facit.
b) Summan av två motstående vinklar i en fyrhörning som är inskriven i en cirkel är 180°.

Således gäller att $A+C=180^\circ \quad \Rightarrow \quad C = A-180^\circ$

I a)-uppgiften är visat att

$$\cos A = \frac{1+16\cos C}{15} = \frac{1+16\cos(180^\circ - A)}{15} =$$

$$= \frac{1+16\cdot(-\cos A)}{15} = \frac{1-16\cos A}{15}$$

$$15\cos A = 1-16\cos A \quad \Rightarrow \quad 31\cos A = 1$$

$$\cos A = \frac{1}{31}$$

Svar: $\cos A = \frac{1}{31}$

34. $\frac{\sin v}{1+\cos v} = \frac{2\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}}{1+\left(\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}\right)} =$

$$= \frac{2\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}+\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}} = \frac{2\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}}{2\cos^2\frac{v}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}} = \tan\frac{v}{2}$$, vilket skulle visas.

Vi har då utnyttjat formeln för dubbla vinkeln tillämpad på sin v och cos v. Vi har också utnyttjat den trigonometriska ettan.

35. $\tan u+\tan v = \frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u\cdot\cos v}{\cos u\cdot\cos v}+\frac{\cos u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v} =$

$$= \frac{\sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v} = \frac{\sin(u+v)}{\cos u\cdot\cos v}$$, vilket skulle visas. Vi har också använt en additionsformel för sinus.

36. Sinussatsen ger $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC}$ (*)

Vinkeln $B = 2A$ och $\frac{BC}{4} = \frac{AC}{3} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{3}{4}BC$

Insättning i ekv. (*) ger: $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin 2A}{\frac{3}{4}\cdot BC}$

$$\sin 2A = \frac{4}{3}\sin A$$

$$2\sin A\cos A - \frac{4}{3}\sin A = 0$$

$$\sin A\cos A - \frac{2}{3}\sin A = 0$$

$$\sin A\cdot(\cos A - \frac{2}{3}) = 0$$

I. $\sin A = 0$

$A = 90^\circ + n\cdot 360^\circ$

$A = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad B = 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$ orimligt!

II. $\cos A - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos A = \frac{2}{3}$

$A = \pm 48{,}2^\circ + n\cdot 360^\circ$

A är en vinkel i en triangel. Således $A = 48{,}2^\circ$.

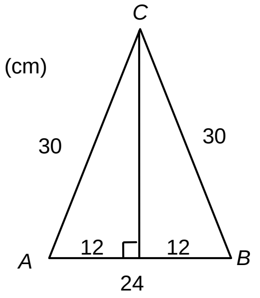
$B = 2\cdot 48{,}2^\circ = 96{,}4^\circ$

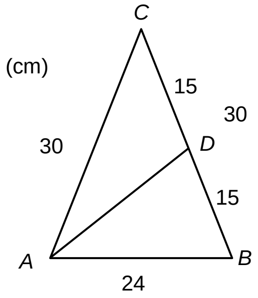
$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 48{,}2^\circ - 96{,}4^\circ = 35{,}4^\circ$

Svar: Vinklarna är $35{,}4^\circ$, $48{,}2^\circ$ och $96{,}4^\circ$

37. Vi bestämmer första triangelns vinklar.
Vi drar höjden mot sidan AB och delar därmed upp triangeln i två rätvinkliga trianglar.
Trigonometri på en av dem ger

$$\cos A = \frac{12}{30} = 0,4 \quad \Rightarrow \quad A = 66,4^{o}$$





Triangeln ABC är likbent.

$B = 66,4^{o}$ och $C = 180^{o} - 2\cdot 66,4^{o} = 47,2^{o}$

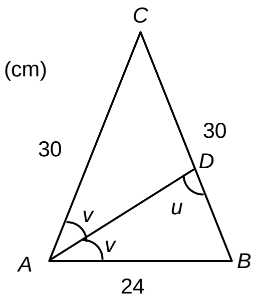
a) Vi tillämpar cosinussatsen på triangeln ABD.

$$AD^2 = 24^2 + 15^2 - 2\cdot 24\cdot 15\cdot \cos 66,4^{o} =$$

$$= 24^2 + 15^2 - 2\cdot 24\cdot 15\cdot 0,4 = 513$$

$$AD = \sqrt{513} = 22,6 \text{ cm}$$

b) Linjen AD är en bisektris, dvs. den delar vinkeln A i två lika delar v. $v = \frac{A}{2} = \frac{66,4^{o}}{2} = 33,2^{o}$



$$v = \frac{A}{2} = \frac{66,4^{o}}{2} = 33,2^{o}$$

$$u + v + B = 180^{o}$$

$$u = 180^{o} - v - B = 180^{o} - 33,2^{o} - 66,4^{o} = 80,4^{o}$$

Sinussatsen tillämpad på triangeln ABD ger:

$$\frac{\sin u}{24} = \frac{\sin B}{AD} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 80,4^{o}}{24} = \frac{\sin 66,4^{o}}{AD}$$

$$AD = \frac{24\cdot \sin 66,4^{o}}{\sin 80,4^{o}} = 22,3 \text{ cm}$$

Svar: a) 22,6 cm b) 22,3 cm

38. Se lösning i lärobokens facit.
Tillägg: Vi söker minsta möjliga värde på k för vilket kurvan $\sin x$ skär linjen $y = kx$

$$\sin x = kx \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sin x}{x}$$

Sätt $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ och sök denna funktion minimum.

$$f'(x) = \frac{x\cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$

Sätt $\frac{x\cdot \cos x - \sin x}{x^2} = 0$

$$x\cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$x\cdot \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\tan x = x$$

Denna ekvation kan inte lösas exakt, men räknarens hjälp kan vi finna ett närmevärde, $x \approx 4,493409$

Vi får då

$$k = \frac{\sin 4,493409}{4,493409} \approx -0,217$$