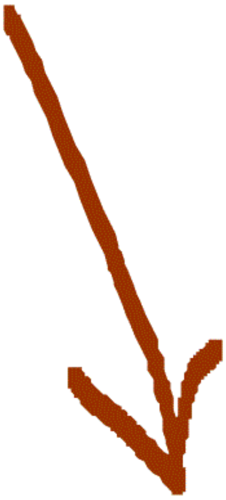

1020. Additionsformlerna tillämpas.

a) $\cos(x+45^{\circ}) = \cos x \cdot \cos 45^{\circ} - \sin x \cdot \sin 45^{\circ} =$

$= \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \sin x)$

b) $\sin(120^{\circ} + u) = \sin 120^{\circ} \cdot \cos u + \cos 120^{\circ} \cdot \sin u =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos u - \frac{1}{2} \cdot \sin u$

c) $\sin(270^\circ - v) = \sin 270^\circ \cdot \cos v - \cos 270^\circ \cdot \sin v =$
$= -1 \cdot \cos v - 0 \cdot \sin v = -\cos v$

d) $\cos(y - 60^\circ) = \cos y \cdot \cos 60^\circ + \sin y \cdot \sin 60^\circ =$
$\cos y \cdot \frac{1}{2} + \sin y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin y$

Svar: a) $\cos(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \sin x)$

b) $\sin(120^\circ + u) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos u - \frac{1}{2} \cdot \sin u$

c) $\sin(270^\circ - v) = -\cos v$

d) $\cos(y - 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin y$

$\sin v = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Additionsformlerna ger

a) $\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v =$

$= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{6}{15} - \frac{4\sqrt{5}}{15} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$

b) $\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v =$

$= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{8}{15} + \frac{3\sqrt{5}}{15} = \frac{3\sqrt{5} - 8}{15}$

Svar: a) $\cos(u + v) = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$

b) $\sin(u + v) = \frac{3\sqrt{5} - 8}{15}$

1021. a) Trigonometriska ettan: $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

v är en vinkel i första kvadranten och då är sin $v > 0$.

$\sin v = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

u är en vinkel i andra kvadranten och då är cos $u < 0$.

$\cos u = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

c) Additionsformeln ger

$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v =$

$= -\frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{21}}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{15}$

Svar: a) $\sin v = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\cos u = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

c) $\cos(u - v) = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{15}$

1022. Trigonometriska ettan: $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

u är en vinkel i första kvadranten och då är sin $u > 0$.

$\sin u = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

På samma sätt beräknas sin v.

$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

v är en vinkel i andra kvadranten och då är sin $v > 0$.

1023. a) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$

$= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) =$

$= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Svar: a) $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ b) $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

1024. a) $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x + 60^\circ) =$

$= \sin x \cdot \cos 30^\circ + \cos x \cdot \sin 30^\circ +$
$+ \sin x \cdot \cos 60^\circ + \cos x \cdot \sin 60^\circ =$

$= \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot (\sin x + \cos x)$

b) $\sin x + 2\cos(x + 30^\circ) =$

$= \sin x + 2(\cos x \cdot \cos 30^\circ - \sin x \cdot \sin 30^\circ) =$

$= \sin x + 2(\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2}) =$

$= \sin x + \sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}\cos x$

Svar: a) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot (\sin x + \cos x)$ b) $\sqrt{3}\cos x$

1025. a) $\sin(30^\circ + v) + \sin(30^\circ - v) =$

$= \sin 30^\circ \cdot \cos v + \cos 30^\circ \cdot \sin v +$

$+ \sin 30^\circ \cdot \cos v - \cos 30^\circ \cdot \sin v = 2\sin 30^\circ \cdot \cos v =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos v = \cos v$

b) $\cos(30^\circ - v^\circ) - \cos(30^\circ + v^\circ) =$

$= \cos 30^\circ \cdot \cos v + \sin 30^\circ \cdot \sin v - \cos 30^\circ \cdot \cos v +$

$+ \sin 30^\circ \cdot \sin v = 2\sin 30^\circ \cdot \sin v = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin v = \sin v$

Svar: a) cos *v* b) sin *v*

1026. Utveckling med additionsformlerna ger

a) $\sin(90^\circ - v) = \sin 90^\circ \cdot \cos v - \cos 90^\circ \cdot \sin v =$

$= 1 \cdot \cos v - 0 \cdot \sin v = \cos v,$ vilket skulle visas.

b) $\cos(90^\circ - v) = \cos 90^\circ \cdot \cos v + \sin 90^\circ \cdot \sin v =$

$= 0 \cdot \cos v + 1 \cdot \sin v = \sin v,$ vilket skulle visas.

1027. $\cos(45^\circ - v) - \sin(45^\circ - v) =$

$= \cos 45^\circ \cdot \cos v + \sin 45^\circ \cdot \sin v -$

$-(\sin 45^\circ \cdot \cos v - \cos 45^\circ \cdot \sin v) =$

$= \cos 45^\circ \cdot \cos v + \sin 45^\circ \cdot \sin v -$

$- \sin 45^\circ \cdot \cos v + \cos 45^\circ \cdot \sin v =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos v + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin v - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos v + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin v =$

$= \sqrt{2} \cdot \sin v,$ vilket skulle visas.

1028. Enligt additionsformlerna gäller att

$\sin 70^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 70^\circ \cdot \sin 10^\circ = \sin(70^\circ - 10^\circ) =$

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vilket skulle visas.

1029-1030. Se lösning i lärobokens facit.

1031. Se lösning i läroboken.

1032. a) Se lärobokens facit. *A* och *B* ligger på enhetscirkeln.
OA = *OB* = 1

b) Sträckan *AB* bestäms med avståndsformeln.

$AB^2 = \left(\frac{4}{5} - \frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\right)^2 = \frac{64}{65}$

$\angle AOB = v$ bestäms sedan med cosinussatsen.

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos v$

$\frac{64}{65} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos v$

$2 \cdot \cos v = 2 - \frac{64}{65} \quad \Rightarrow \quad \cos v = \frac{33}{65} \quad \Rightarrow \quad v \approx 59{,}5^\circ$

Svar: $\angle AOB \approx 59{,}5^\circ$

1033. a) Vi vet att $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ och $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vi kan då med hjälp av subtraktionsformlerna skriva

$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sin 30^\circ \cdot \cos x - \cos 30^\circ \sin x =$

$= \sin(30^\circ - x)$

b) Det gäller också att $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ och $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Då kan vi också skriva

$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos 60^\circ \cdot \cos x - \sin 60^\circ \sin x =$

$= \cos(60^\circ + x)$

c) Eftersom $= \sin(90^\circ - x) = \cos x$ gäller att

$\sin(30^\circ - x) = \sin(90^\circ - 60^\circ - x) = \sin(90^\circ - (60^\circ + x)) =$

$= \cos(60^\circ + x)$

Svar: a) $\sin(30^\circ - x)$ b) $\cos(60^\circ + x)$ c) se ovan